

Funktionaalianalyysin peruskurssi

Harjoitus 9

8.4. 2010

1. Anna esimerkki jatkuvista lineaarikuvauksista  $S, T \in \mathcal{L}(E)$  (sopivassa Banachin avaruudessa  $E$ ), joille  $\|ST\| < \|S\| \|T\|$ . Voitko valita jopa  $S = T$ ?

2. Olkoon  $1 \leq p < \infty$ . Etsi sellainen jatkuva lineaarinen injektio  $S : \ell^p \rightarrow \ell^p$ , jonka kuva  $\text{Im}(S) = \{Sx : x \in \ell^p\}$  ei ole suljettu avaruudessa  $\ell^p$ . [Vihje. Riittää etsiä haluttu esimerkki diagonaalioperaattoreiden  $(x_k) \mapsto (a_k x_k)$  joukosta, missä  $(a_k)$  on sopiva rajoitettu skalaarijono, ja muistaa HT 4:4]

3. Olkoon  $E$  Banachin avaruus,  $T \in \mathcal{L}(E)$  jatkuva lineaarinen kuvaus ja  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  sellainen luku, että  $\|T^n\| < |\lambda|^n$  jollakin  $n \in \mathbb{N}$ . Osoita Neumannin sarjan avulla, että  $\lambda I - T$  on kääntyvä operaattori. [Vihje: pyri kirjoittamaan  $\lambda^n I - T^n = (\lambda I - T)S = S(\lambda I - T)$  sopivalla operaattorilla  $S \in \mathcal{L}(E)$ .]

4. Olkoon  $V : C(0, 1) \rightarrow C(0, 1)$  Volterra operaattori

$$(Vf)(t) = \int_0^t f(s) ds, \quad t \in [0, 1], \quad f \in C(0, 1).$$

Näytä induktiolla, että  $\|V^n\| \leq \frac{1}{n!}$  kaikilla  $n \in \mathbb{N}$ . Päätele edellisestä tehtävästä, että Volterran integraaliyhtälöllä

$$\lambda f(t) - \int_0^t f(s) ds = g(t), \quad t \in [0, 1],$$

on yksikäsitteinen ratkaisu  $f \in C(0, 1)$  kaikilla annetuilla  $g \in C(0, 1)$  ja skalaareilla  $\lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq 0$ .

5. (Heisenbergin epämääräisyysperiaate lineaarikuvauksille) Olkoot  $A$  ja  $B$  lineaarikuvauksia  $\ell^2 \rightarrow \ell^2$ , joille  $AB - BA = I_{\ell^2}$  (identtinen kuvaus). Todista, että silloin  $A$  ja  $B$  eivät molemmat voi olla rajoitettuja operaattoreita. [Idea. Verifioi ensin induktiolla, että

$$AB^n - B^n A = nB^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Jos olisi  $A, B \in \mathcal{L}(\ell^2)$ , niin johda tästä ristiriita riittävän suurilla  $n$ .]