$$\begin{aligned} \ell(\theta) &= \log L(\theta) \\ &= \log \binom{n}{t} + t \log \theta + (n-t) \log (1-\theta) \end{aligned}$$

$$\ell'(\theta) = \frac{t}{\theta} - \frac{n-t}{1-\theta} = \frac{t-\theta n}{\theta(1-\theta)}$$

(etumerkin määrää $t - \theta n$)

		t/n	
ℓ'	$+$		$-$
ℓ	$\nearrow$		$\searrow$

Johtopäätös: ℓ ja siten myös L saa suurimman arvonsa pisteessä $\theta = t/n$

Siis θ:n su-estimaatti on $\boxed{\hat{\theta} = \frac{t}{n}}$

kuten jo esimerkeissä s. 9-10 saatiin.

Huom. 1. Jos havaintoja vast. sm:t $X_1, \ldots, X_n$ ovat $\perp\!\!\!\perp$, on uskottavuusfunktio muotoa

$$L(\theta; \underset{\sim}{x}) = g_{X_1}(x_1; \theta) \cdots g_{X_n}(x_n; \theta)$$

jossa $g_{X_i} = X_i$:n ptnf/tf

Jos $X_1, \ldots, X_n$ lisäksi samoin jakautuneita (s. 8 tilanne), on tässä tietysti $g_{X_i} = g$ sama kaikille i.

Huom. 2. Yleensä su-estimaatin määrittäminen on laskuteknisesti mukavampaa uskottavuusfunktion logaritmin avulla! (Syy: logaritmointi muuntaa tulot summiksi.)

Huom. 3. Todellisissa sovellustilanteissa, joissa mallit ovat monimutkaisia ja parametri θ yleensä moniulotteinen (ts. koostuu monesta reaalisesta komponentista), su-estimaatin määritys ei onnistu analyyttisesti "suljetussa muodossa" vaan joudutaan turvautumaan numeerisiin (optimointi)menetelmiin.

5. NORMAALIJAKAUMAMALLIN PARAMETRIEN ESTIMOINNISTA

[vrt. Arjas - Sirén, jakso 2.6 (ja 2.4)]

Tark. mallia "riippumaton otos jakaumasta $N(\mu, \sigma^2)$":

$$\boxed{X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \perp\!\!\!\perp}$$

Mallin yhteistiheysf on (ks. s. 8) (merk. $\underset{\sim}{x} = (x_1, \ldots, x_n)$)

$$f(\underset{\sim}{x}; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2\right\}$$

Tutkitaan parametrien μ ja σ^2 estimointia su-menetelmällä.

(A) Olet. aluksi: $\sigma^2 > 0$ on <u>tunnettu luku</u> ja <u>parametrina</u> vain μ, $\mu \in \mathbb{R}$. (harvoin realistinen tilanne)

Uskottavuusfunktio (vast. aineistoa $\underset{\sim}{x} = (x_1, \ldots, x_n)$)

$$(*) \qquad L(\mu) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2\right\}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

logaritmi:

$$\ell(\mu) = \log L(\mu) = -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

$$\ell'(\mu) = -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \left[-2(x_i - \mu)\right] = \frac{1}{\sigma^2} \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu\right]}_{\text{vaihtaa merkkinsä +:sta −:een}}$$

$$\ell'(\mu) = 0 \iff \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Saatu: μ:n <u>su-estimaatti</u> on

$$\boxed{\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i} \qquad (\underline{\text{otoskeskiarvo}})$$

(B) Yleinen tilanne: parametri on 2-ulotteinen (μ, σ^2), jossa $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$.

Uskottavuusfunktio $L(\mu, \sigma^2)$ kuten edellä (lauseke (*)).
Pätee hajotelma (tarkista!)

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu)^2 ,$$

$$\left(\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{otoskeskiarvo} \right)$$

Logaritmoidaan ja käytetään tätä hajotelmaa:

$$\ell(\mu, \sigma^2) = \log L(\mu, \sigma^2)$$

$$= -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 - \frac{n}{2\sigma^2} (\bar{x} - \mu)^2$$

Huom. tämä riippuu μ:stä vain viimeisen termin kautta!
Selvästi $-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x} - \mu)^2 \le 0$ aina ja "=" pätee
$\iff \mu = \bar{x}$.

Tark. sitten (vain σ^2:sta riippuvaa!) funktiota

$$u(\sigma^2) = \ell(\bar{x}, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 ,$$

$$u'(\sigma^2) = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

Huom. Derivaatta σ^2:n suhteen, ei σ:n!

$$= \frac{1}{2\sigma^2} \left[-n + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \right]$$

$$= 0 \iff \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

(tee merkkitarkastelu: tämä todella on maksimikohta!)

Saatu: parametrin (μ, σ^2) su-estimaatti on

$$\boxed{\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i , \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

Huomautuksia & lisätietoja:

* Tuntuu järkevältä estimoida jakauman odotusarvoa ("teoreettista keskiarvoa") otoskeskiarvolla $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

* Vastaavalle sm:lle $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ (eli estimaattorille) pätee

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \mu$$

Sanotaan: $\bar{X}$ on harhaton estimaattori μ:lle.
Se siis tuottaa "odotusarvoisesti" oikean tuloksen!
Toistetun ainestonkeruun näkökulmasta: jos otanta toistetaan yhä uudelleen ja uudelleen ja joka kerta aineistosta $\underset{\sim}{x}$ lasketaan $\hat{\mu} = \bar{x}$, niin saadut estimaatit osuvat keskimäärin oikeaan. (Vrt. HT 2/5.)

* Sen sijaan $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ ei ole harhaton estimaattori σ^2:lle, vaan sen odotusarvo on
$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 = (1-\frac{1}{n})\sigma^2$.

Tästä syystä σ^2:n estimaattina useimmiten käytetään lukua

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \qquad \text{(otosvarianssi)}$$

Sitä vastaavalle sm:lle S^2 pätee $E(S^2) = \sigma^2$.
Ero $\hat{\sigma}^2$:een on merkityksetön, jollei n ole kovin pieni.

* Tarkemmin ottaen pätee seuraava lause:
Kun $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\perp\!\!\!\perp$, niin

i) $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

ii) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2_{n-1}$

"khii-toiseen" jakauma, n-1 vapausasteella

iii) $\bar{X} \perp\!\!\!\perp S^2$

[Todistus aineopintojen tn-laskennan kurssilla.]