

Johdatus tilastolliseen päättelyyn Harjoitus 1 (22.–26. 3. 2010)

1. Diskreetin satunnaismuuttujan X pistetodennäköisyysfunktio on $f(x; \theta)$, jossa parametrialle θ on kaksi vaihtoehtoista arvoa: 1 ja 2. Funktion arvot on taulukoitu alla. (Tavalliseen tapaan sovimme, että $f(x; \theta) = 0$ kaikilla niillä x :n arvoilla, joita ei ole mainittu.)

x	1	2	3	4	5
$f(x; 1)$	0	0	0.8	0.1	0.1
$f(x; 2)$	0.1	0.4	0.3	0.2	0

Tarkista, että kummallakin θ :n arvolla $f(x; \theta)$ täyttää pistetodennäköisyysfunktioilta vaadittavat ominaisuudet. Esitä kumpikin funktio graafisesti.

2. (Jatkoa edelliseen tehtävään.) Emme tiedä, kumpi θ :n arvoista on se ”oikea”, jota sattuma käyttää arpoessaan X :n arvon. Siksi suoritamme kokeen ja yritämme päätellä θ :n arvon sen tuloksesta.

Oletetaan, että havaittiin $X = 2$. Mitä päättelisit θ :n arvosta ja voitko olla siitä varma? Miten arvioisit tilannetta, jos havainto olisikin ollut $X = 3$?

3. Laatikossa on arpaliput, jotka on numeroitu luvuin $1, 2, \dots, \theta$, jossa $\theta \geq 1$ on kokonaisluku. Poimitaan yksi lippu umpimähkään, ja olkoon X siinä oleva luku.

a) Mikä on satunnaismuuttujan X pistetodennäköisyysfunktio $f(x; \theta)$?

b) Oletetaan, että tuloksena saatiin $X = 13$. Millainen θ :n täytyy olla tämän perusteella? Mikä θ :n arvo tekee tämän tuloksen mahdollisimman todennäköiseksi?

4. Korissa on 50 palloa: 30 keltaista ja 20 valkoista. Nostetaan umpimähkään ja palauttaen 10 palloa. Saatujen keltaisten lukumäärä on satunnaismuuttuja T . Mitä (todennäköisyyslaskennasta hyvin tuttua) jakaumaa T noudattaa? Mitkä ovat sen odotusarvo ja keskihajonta? Laske vielä todennäköisyys tapahtumalle $\{|T/10 - 0.6| \leq 0.1\}$ eli $\{T = 5, 6, 7\}$.

[*Vihje.* Tulkitse toistokokeena.]

5. (Jatkoa edelliseen tehtävään.)

a) Nostoja onkin 10:n sijasta 100. Arvioi nyt tapahtuman $\{|T/100 - 0.6| \leq 0.1\}$ todennäköisyyttä.

b) Arvioi, kuinka suuri pitäisi nostojen lukumäärän n olla, jotta todennäköisyys tapahtumalle $\{|T/n - 0.6| \leq 0.1\}$ olisi ≥ 0.99 .

[*Ohje.* Palauta mieleen binomijakauman normaaliapproksimaatio ja käytä sitä sekä normaalijakauman taulukoita.]

Huom. Ainakin 20 % harjoitustehtävien kokonaismäärästä on ratkaistava, jotta kurssin voi suorittaa kurssikokeella. Lisäpisteitä saa tällöin 1, 2, 3 tai 4 sen mukaan, onko ratkaissut vähintään 20, 40, 60 vai 80 prosenttia tehtävistä. Pisteiden saaminen edellyttää läsnäoloa harjoitusryhmässä.