

## Funktioteoria I — Harjoitus 12 (7. 12. 2009)

1. Määritä

$$\int_{\partial D(0,3)} \frac{z}{z^2 + 1} dz,$$

kun  $\partial D(0, 3)$  on kiekon  $D(0, 3)$  positiivisesti suunnistettu reuna.

[*Ohje.* Jaa  $z^2 + 1$  tekijöihin ja muodosta vastaava osamurtohajotelma.]

2. Onko olemassa sellaista yksikkökiekkossa  $D(0, 1)$  analyyttistä funktiota  $f$ , että

a)  $f(0) = 0$  ja  $|f(z)| = 2$ , kun  $|z| = \frac{1}{2}$ ,

b)  $f(0) = 1 + 2i$  ja  $|f(z)| = 2$ , kun  $|z| = \frac{1}{2}$ ,

c)  $f(\frac{1}{n}) = (-1)^n \frac{1}{n}$ , kun  $n = 2, 3, 4, \dots$ ?

[*Vihje.* Muista maksimiperiaate ja yksikäsitteisyyslause.]

3. Olkoon  $D = D(0, 1)$  ja  $f: D \rightarrow D$  analyyttinen sekä  $f(0) = 0$  kuten Schwarzin lemmassa. Osoita, että  $|f'(0)| \leq 1$  ja että yhtäsuuruus pätee vain silloin, kun  $f$  on kierto.

[*Ohje.* Tutki Schwarzin lemmän todistusta.]

4. Olkoon  $f$  alueessa  $A$  analyyttinen funktio, jolle  $|f(z) - 1| < 1$  kaikilla  $z \in A$ . Näytä, että

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

jokaisella umpinaisella paloittain  $C^1$  polulla  $\gamma$  alueessa  $A$ .

[*Vihje.* Logaritmillä on haara  $D(1, 1)$ :ssä.]

5. Kääntöpuolelle on piirretty kaksi umpinaista polkua  $\gamma$  kompleksitasossa. Päättele (havainnollisesti) kummassakin tapauksessa, montako yhtenäistä komponenttia joukolla  $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$  on, ja merkitse kuhunkin komponenttiin vastaava kierrosluvun  $n(\gamma, a)$  arvo.

6. Oletetaan, että  $f$  on analyyttinen ja rajoitettu punkteeratussa kiekkossa  $D(a, r) \setminus \{a\}$ . Osoita, että  $f(a)$  voidaan määritellä siten, että  $f$  on analyyttinen koko kiekkossa  $D(a, r)$ .

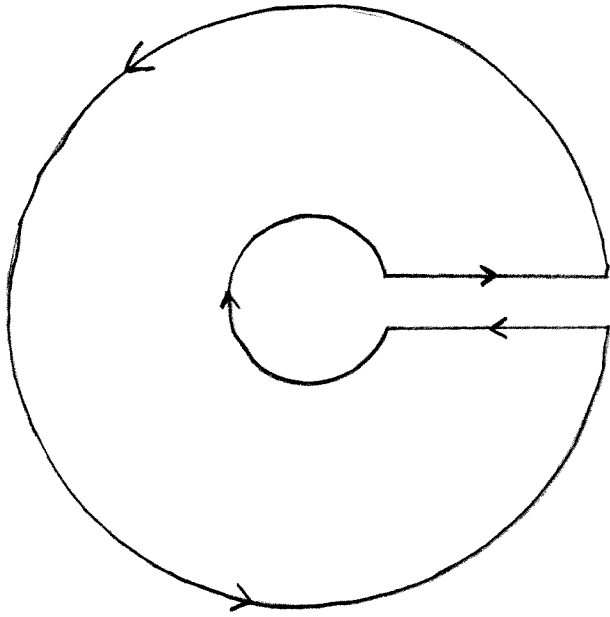
[*Vihje.* Tutki ensin  $g(z) = (z - a)^2 f(z)$ .]

**Viimeinen luento** on pe 11.12. Silloin kertausta kurssin loppuosan asioista. Lisäksi tarjotaan kahvia/teetä ja pullaa, joten kaikkien kurssille osallistuneiden läsnäolo on toivottavaa!

**Viimeiset harjoitukset** ovat ma 14.12.

**2. kurssikoe** on ke 16.12 klo 11.00–13.00 salissa CK112. Koealueena muistiinpanojen luvut 6–10 (varsinaisesti s. 45 kaksoissuhteesta alkaen; loppusivu selviää myöhemmin) sekä harjoitukset 7–13.

a)



b)

