

## Funktioteoria I — Harjoitus 6 (19. 10. 2009)

1. Tarkastellaan rationaalifunktiota

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}.$$

Miten  $f$  on määriteltävä nimittäjän nollakohdissa ja pisteessä  $\infty$ , jotta siitä tulee meromorfinen koko laajennetussa tasossa  $\overline{\mathbb{C}}$ ? Mitkä ovat sen navat? Missä pisteissä  $f$  on peräti konforminen?

2. Tutki, onko funktiolla  $e^z$  raja-arvoa (kompleksiluku tai  $\infty$ ), kun  $z \rightarrow \infty$ . Entä funktiolla  $z + e^z$ ?
3. Olkoot  $f: U \rightarrow V$  ja  $g: V \rightarrow W$ , jossa  $U, V$  ja  $W$  ovat avoimia laajennetussa tasossa  $\overline{\mathbb{C}}$ . Näytä, että jos  $f$  on analyyttinen tai meromorfinen (vast. konforminen) pisteessä  $z_0 \in U$  ja sama pätee  $g$ :lle pisteessä  $f(z_0)$ , niin  $g \circ f$  on analyyttinen tai meromorfinen (vast. konforminen) pisteessä  $z_0$ .

[Ketjusäännön 3.8 seurauksena tiedämme tämän siinä tapauksessa, että pisteet  $z_0, f(z_0)$  ja  $g(f(z_0))$  ovat kompleksilukuja. On näytettävä sama asia, kun yksi tai useampi näistä on  $\infty$ . Riittää kun tarkastelet huolellisesti pari kolme tapausta.]

4. a) Osoita, että kompleksitasossa  $\mathbb{C}$  jokaisella rajoitetulla jonolla on suppeneva osajono. [Jono  $(z_n)$  on rajoitettu joss  $\sup_n |z_n| < \infty$ . Ota lähtökohdaksi tieto, että  $\mathbb{R}$ :ssä rajoitetuilla jonoilla on suppeneva osajono.]  
b) Osoita, että laajennettu taso  $\overline{\mathbb{C}}$  on (jono)kompakti: siellä jokaisella jonolla  $(z_n)$  on suppeneva osajono. Tee tämä ”suoraan” menemättä Riemannin pallolle ja  $\mathbb{R}^3$ :een.
5. Etsi Möbius-kuvaus, joka on tason kierto 90 asteen verran vastapäivään pisteen  $z = i$  ympäri. Mitkä kaksi laajennetun tason pistettä pysyvät tässä paikoillaan?

6. Olkoon

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

mielivaltainen Möbius-kuvaus. Näytä, että se voidaan lausua yhdisteenä siirroista  $z \mapsto z + \alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{C}$ ), multiplikaatioista  $z \mapsto \alpha z$  ( $\alpha \neq 0$ ) ja inversioista  $z \mapsto 1/z$ . [Tarkastele erikseen tapaukset  $c = 0$  ja  $c \neq 0$ .]

**1. kurssikoe** järjestetään keskiviikkona 21.10. kello 15.15–17.15 salissa CK112. Koealueena ovat muistiinpanojen sivut 1–45 (viimeinen jakso otsikolla ”Möbius-kuvaukset”) lukuunottamatta sivujen 37–38 jaksoa ”Lisätietoa konformisuudesta” ja lisäksi harjoitukset 1–6.

**Luennot ma 19.10. ja pe 23.10.** normaalisti; ma kertausta ja mahdollisuus kysymyksiin.

**Viikolla 26.10.–1.11.** ei opetusta. Jatkamme ma 2.11. (harjoitukset ja luento).