

## Funktioteoria I — Harjoitus 4 (5. 10. 2009)

1. Laske Möbius-kuvauksen

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0)$$

derivaatta  $f'(z)$ . Missä pisteissä se on nolla? Mitä tapahtuu, jos ehto  $ad - bc \neq 0$  ei ole voimassa?

2. Hajota funktio  $1/z$  ( $z \neq 0$ ) reaali- ja imaginaariosaansa ja totea, että Cauchyn ja Riemannin yhtälöt toteutuvat.
3. Olkoon  $f(x + iy) = x^2 + iy^2$ . Tutki, missä pisteissä derivaatta  $f'(x + iy)$  on olemassa, ja laske sen arvo näissä pisteissä. Onko  $f$  analyyttinen missään pisteessä?
4. Määrittele neliöjuurelle (analyyttinen) haara positiivista reaaliakselia pitkin aukileikatussa tasossa  $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ . Voiko tämän tehdä useammalla kuin yhdellä tavalla? (Haaran jatkuvuuden toteamiseen riittänee uskottava havainnollinen päättely.)
5. Olkoon  $A = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  ja  $\sqrt{\phantom{x}}$  neliöjuuren päähaara  $A$ :ssa. Tutki, päteekö laskusääntö  $\sqrt{zw} = \sqrt{z}\sqrt{w}$  aina, kun  $z, w \in A$  ja myös  $zw \in A$ . Jos ei, mikä menee pieleen ja miten vasemman ja oikean puolen luvut voivat erota toisistaan? Keksitkö jonkin luontevan riittävän ehto luvuille  $z$  ja  $w$ , jolloin ko. kaava olisi voimassa?
6. Oletetaan, että  $f = u + iv$  on analyyttinen kompleksitasossa. Esitetään  $u$  ja  $v$  napakoordinaateissa, ts. tarkastellaan funktioita

$$U(r, \varphi) = u(re^{i\varphi}) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

$$V(r, \varphi) = v(re^{i\varphi}) = v(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

kun  $r > 0$  ja  $\varphi \in \mathbb{R}$ . Johda Cauchyn ja Riemannin yhtälöiden vastineet:

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi}.$$

[Ohje. Tarvitset sopivan ketjusäännön version vektorianalyysin kurssilta.]