

Funktioteoria I

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syyslukukausi 2009

Kari Astalan
muistiinpanoista (2005) muokannut
Pekka Nieminen

Kuvat: Martti Nikunen

Funktioteorian eli kompleksianalyysin kurssin teemoina ovat a) kompleksiluvut \mathbb{C} eli luvut muotoa $z = x + iy$, jossa $x, y \in \mathbb{R}$ ja $i^2 = -1$, b) kompleksimuuttujan (derivoituvat) funktiot $f(z)$ ja c) näiden analyysi.

Matematiikan peruskursseilla opittuun reaaliomuuttujan funktioiden analyysiin verrattuna kompleksianalyysi on teoriana kauniimpi ja täydellisempi. Lisäksi sillä on vahva yhteys geometriaan, koska kompleksiluvut \mathbb{C} voidaan samaistaa tason \mathbb{R}^2 pisteiden kanssa.

Lisätietoja kurssin aihepiiristä saa esimerkiksi seuraavista kirjoista, jotka kaikki menevät pitemmälle kuin tämä kurssi:

- J. B. CONWAY: *Functions of One Complex Variable I* (2nd ed.), Springer, 1978.
- R. E. GREENE & S. G. KRANTZ: *Function Theory of One Complex Variable* (2nd ed.), AMS, 2002.
- O. LEHTO: *Funktioteoria I–II*, Limes ry, 1982.
- B. PALKA: *An Introduction to Complex Function Theory*, Springer, 1991.
- W. RUDIN: *Real and Complex Analysis* (3rd ed.), McGraw-Hill, 1987.

Lehdon luentomuistiinpanoja on käytetty kurssilla takavuosina. Mainituista englanninkielisistä oppikirjoista Rudin on ehkä vaativin ja Palka helppolukuisin mutta varsin runsas. Näihin kirjoihin kannattaa tutustua nähdäkseen, mitä funktioteoria kauneimmillaan voi tarjota.

Sisältö

1 Kompleksitaso	1
Kompleksiluvut	1
Moduli ja argumentti	4
Moivre'n ja Eulerin kaavat	6
Binomiyhtälö napaesityksessä	8
2 Kompleksitason topologiaa	10
Metriikka	10
Avoimet ja suljetut joukot	10
Sisus, reuna ja sulkeuma	11
Kompleksilukujonojen suppeneminen	12
Funktion jatkuvuus	13
Funktion raja-arvo	15
Yhtenäisyydestä	16
3 Analyttiset funktiot	19
Kompleksinen derivaatta	19
Derivointisääntöjä	20
Cauchyn ja Riemannin yhtälöt	23
Harmoniset funktiot	26
Käänteisfunktion analyttisyys; juurifunktio	26
4 Eksponentti- ja logaritmfunktio	29
Eksponenttifunktio	29
Logaritmfunktio	31
Kompleksinen potenssifunktio	33
5 Konformisuus ja laajennettu taso	34
Polun tangentti	34
Konformisuus	35
Lisätietoa konformisuudesta	37
Riemannin pallo	38
Raja-arvot ja jatkuvuus $\bar{\mathbb{C}}$:ssä	40
Analyttisyys ja konformisuus $\bar{\mathbb{C}}$:ssä	41

6	Möbius-kuvaukset ja kuvaustehtäviä	44
	Möbius-kuvaukset	44
	Kaksoissuhde	45
	Möbius-ympyrät Möbius-kuvauksessa	48
	Alueiden konformikuvaustehtäviä	50
7	Potenssisarjat	54
	Sarjan suppeneminen	54
	Potenssisarjat ja suppenemissäde	54
	Hadamardin lause	56
	Potenssisarjan summan analyttisyys	57
8	Kompleksinen integrointi	60
	Polkuintegraali	60
	Integraali kaarenpituuden suhteen	63
	Integraalifunktio	64
	Goursat'n lemma	67
	Cauchyn integraalilause kiekossa	69
9	Cauchyn kaava ja sen seurauksia	72
	Cauchyn integraalikaava ympyränkehälle	72
	Analyttisen funktion Taylor-sarja	74
	Eräitä Taylor-sarjoja	77
	Analyttisen funktion nollakohdat ja yksikäsitteisyys	78
	Liouvillen lause	79
	Maksimiperiaate ja Schwarzin lemma	81
10	Cauchyn kaavan globaali muoto	84
	Syklit ja integrointi	85
	Polkujen ja syklien kierrosluvut	86
	Globaali Cauchyn lause ja sovelluksia	89
	Cauchyn lauseen 10.10 todistus	92
	Yhdesti yhtenäiset alueet	94

1 Kompleksitaso

Aloitamme määrittelemällä kompleksiluvut ja niiden peruslaskutoimitukset eli yhteen- ja kertolaskun sekä liittolukuoperaation. Tarkastelemme kompleksiluvun ”napakoordinaattiesitystä” modulin ja argumentin käsitteiden avulla ja johdamme näihin liittyviä hyödyllisiä kaavoja.

Koska oletamme kompleksilukujen olevan ainakin jossain määrin entuudestaan tuttuja, eteneminen on osin nopeaa ja kertauksenomaista.

Kompleksiluvut

Merkitään euklidista tasoa tutulla tavalla: $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, jossa \mathbb{R} on reaalilukujen joukko. \mathbb{R}^2 koostuu siis reaalilukujen muodostamista pistepareista. Tasossa voidaan määritellä luonnollinen vektorisumma eli *yhteenlasku*, jossa

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Laskemme siis koordinaatit pareittain yhteen. Edelleen jokainen tason piste (x, y) voidaan kertoa reaaliluvulla a :

$$a(x, y) = (ax, ay).$$

Tämä vastaa vektorin kertomista reaaliluvulla. Piste (x, y) vasta-alkio on tällöin $(-1)(x, y)$:

$$(x, y) + (-1)(x, y) = (0, 0).$$

Helposti huomaa, että yhteenlasku on vaihdannainen, joten voimme tiivistää yllä olevan sanomalla, että \mathbb{R}^2 varustettuna yhteenlaskulla $+$ on Abelin ryhmä $(\mathbb{R}^2, +)$. Sen nolla-alkio on $(0, 0)$, ja merkitsemme tätäkin vain lyhyesti symbolilla 0 .

Uutena asiana määrittelemme tasossa myös kertolaskun. Tämän saamme aikaan, kun samastamme tason pisteet kompleksilukujen kanssa. Tai paremminkin: kompleksiluvut syntyvät, kun määrittelemme tason pisteille kertolaskun seuraavalla tavalla:

1.1 Määritelmä. Tason \mathbb{R}^2 pisteiden $z_1 = (x_1, y_1)$ ja $z_2 = (x_2, y_2)$ tulo on

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Yleensä merkitsemme tuloa $z_1 \cdot z_2$ lyhyemmin z_1z_2 .

Seuraavat tulon ominaisuudet on helppo tarkistaa laskemalla: Jos z_1, z_2 ja z_3 ovat mielivaltaisia tason pisteitä, niin

- a) $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (*vaihdannaisuus*)
- b) $z_1 \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot z_1 = z_1$ (*neutraalialkio*)
- c) $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ (*liitännäisyys*)
- d) $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$ (*osittelulaki*).

Luonnollisesti määrittelemme $z^0 = (1, 0)$ ja induktiivisesti $z^n = z z^{n-1}$ jokaisella positiivisella kokonaisluvulla n .

Ominaisuudet a–d ja se, että $(\mathbb{R}^2, +)$ on Abelin ryhmä, osoittavat että $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ on ykkösellinen vaihdannainen rengas. Enemmänkin on totta:

1.2 Lause. *Jos $z = (x, y) \neq 0$, niin on olemassa yksikäsitteinen piste $w \in \mathbb{R}^2$ siten, että $zw = wz = (1, 0)$.*

Todistus. Koska kertolasku on vaihdannainen, riittää löytää piste $w = (u, v)$ siten, että $zw = (1, 0)$. Nyt $zw = (xu - yv, xv + yu) = (1, 0)$ jos ja vain jos

$$xu - yv = 1, \quad xv + yu = 0.$$

Tämä on tuntemattomille u ja v muodostettu yhtälöpari, jonka determinantti on $x^2 + y^2 \neq 0$. Siten yhtälöparilla on yksikäsitteinen ratkaisu, ja laskemalla nähdään, että se on

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}. \quad \square$$

Käytämme edellisen lauseen antamalle pisteelle merkintää $1/z$ tai z^{-1} :llä. Se on pisteen z *käänteisalkio*. Siis jos $z = (x, y) \neq 0$, niin

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

1.3 Seuraus. *Taso \mathbb{R}^2 varustettuna yhteenlaskulla $+$ ja kertolaskulla \cdot on kunta.*

1.4 Määritelmä. Kuntaa $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ merkitään \mathbb{C} :llä ja kutsutaan *kompleksitasoksi* tai *kompleksilukujen kunnaksi*. Jokainen piste $z \in \mathbb{C}$ on *kompleksiluku*.

Haluamme tulkita reaaliluvut kompleksilukujen osajoukkona samastamalla reaaliluvun $x \in \mathbb{R}$ kompleksiluvun $(x, 0) \in \mathbb{C}$ kanssa. Suoraan laskutoimitusten määritelmistä seuraa (tarkista!), että kaikilla $x, y, u \in \mathbb{R}$ pätee

$$\begin{aligned} (x, 0) + (u, 0) &= (x + u, 0), \\ (x, 0)(u, 0) &= (xu, 0). \end{aligned}$$

Siten tämä samastus on yhteensopiva laskutoimitusten määritelmien kanssa. Lisäksi nolla-alkiot $0 \in \mathbb{R}$ ja $(0, 0) \in \mathbb{C}$ vastaavat siinä toisiaan; samoin ykkösalkiot $1 \in \mathbb{R}$ ja $(1, 0) \in \mathbb{C}$. Algebran kielellä kuvaus $x \mapsto (x, 0)$ on siis kuntasomorfismi. Näin reaaliluvut \mathbb{R} voidaan ajatella kompleksilukujen \mathbb{C} osajoukkona ja alikuntana.

1.5 Määritelmä. a) Yo. samastuksen mukaisesti merkitsemme kertolaskun ykkösalkiota $(1, 0)$ lyhyesti symbolilla 1 ja kompleksilukua $(x, 0) = x(1, 0)$ lyhyesti x :llä.

b) Piste $(0, 1)$ on *imaginaariyksikkö*. Käytämme siitä merkintää i .

Näillä merkinnöillä jokainen kompleksiluku $z = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) \in \mathbb{C}$ voidaan esittää (yksikäsitteisesti) muodossa

$$(1.6) \quad z = x + iy.$$

Jatkossa käytämmekin lähes yksinomaan tätä esitystapaa!

1.7 Määritelmä. a) Esityksessä (1.6) reaaliluku $x = \operatorname{Re} z$ on kompleksiluvun z *reaaliosa* ja reaaliluku $y = \operatorname{Im} z$ on sen *imaginaariosa*.

b) Joukko $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\}$ on *reaaliakseli*.

c) Joukko $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0\}$ on *imaginaariakseli*, ja sen alkiot ovat *puhtaita imaginaarilukuja*.

Imaginaariyksiköllä $i = (0, 1)$ on seuraava tärkeä ominaisuus:

$$(1.8) \quad i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1,$$

eli se on luvun -1 neliöjuuri, kuten myös on $-i$. Jos nyt $z_1 = x_1 + iy_1$ ja $z_2 = x_2 + iy_2$ ovat mielivaltaisia kompleksilukuja, niin summan ja tulon määritelmät on mukavinta muistaa muodoissa

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \\ z_1 z_2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned}$$

Jälkimmäinen saadaan, kun suoritetaan lukujen $x_1 + iy_1$ ja $x_2 + iy_2$ kertominen termeittäin (osittelulakia soveltaen) ja käytetään kaavaa (1.8).

Seuraava käsite on erittäin hyödyllinen.

1.9 Määritelmä. Kompleksiluvun $z = x + iy$ *liittoluku* eli *kompleksikonjugaatti* on luku $\bar{z} = x - iy$.

Liittoluvun ottaminen vastaa siis peilausta realiakselin suhteen. Erityisesti z on reaalinen eli $\operatorname{Im} z = 0$ jos ja vain jos $z = \bar{z}$. Lisäksi liittoluvuille pätevät seuraavat laskusäännöt:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

Edelleen huomaamme, että kompleksiluvun reaaliosa ja imaginaariosa voidaan lausua liittoluvun avulla:

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Näiden kaavojen todistaminen on harjoitustehtävä.

Moduli ja argumentti

1.10 Määritelmä. Kompleksiluvun $z = x + iy$ *moduli* eli *itseisarvo* on

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Kyseessä on siis tason vektorin $z = (x, y)$ tavallinen euklidinen normi eli pituus. Modulin neliö voidaan kätevästi laskea liitolluvun avulla:

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Jos $z \neq 0$, niin sen käänteisluvulle $z^{-1} = 1/z$ saadaan toisinaan kätevä esitys

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

1.11 Esimerkki. Yo. menetelmällä voidaan esimerkiksi laskea

$$\frac{1}{1 + 2i} = \frac{1 - 2i}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{1 - 2i}{1^2 + 2^2} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

ja edelleen

$$\frac{2 + 5i}{1 + 2i} = (2 + 5i)\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i\right) = \left(2 \cdot \frac{1}{5} + 5 \cdot \frac{2}{5}\right) + \left(2 \cdot \frac{-2}{5} + 5 \cdot \frac{1}{5}\right)i = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i.$$

1.12 Esimerkki. Olkoot z ja w kompleksilukuja. Tarkastellaan summan $z + w$ modulia:

$$|z + w|^2 = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{w} + w\bar{z} = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re} z\bar{w}.$$

Jokaisella kompleksiluvulla selvästikin pätee $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$. Siten yllä on $|\operatorname{Re} z\bar{w}| \leq |z\bar{w}| = |z||w|$ ja saamme arvion

$$|z + w|^2 \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z| + |w|)^2.$$

Olemme siis todistaneet – kompleksilukumenetelmiä käyttäen – *kolmioepäyhtälön*:

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

Tason vektoreilla on paitsi pituus myös suunta, joka voidaan ilmaista suuntakulman avulla. Vastaavasti kompleksiluvuilla:

1.13 Määritelmä. Kompleksiluvun $z = x + iy \neq 0$ *argumentti* eli *vaihekulma* $\arg z$ on sellainen φ , jolle $\cos \varphi = x/|z|$ ja $\sin \varphi = y/|z|$.

Argumentti on siis määritelty vain nollasta eroaville kompleksiluvuille, ja silloinkin vain 2π :n monikertaa vaille. Geometrisesti argumentti on kulma, jonka origosta pisteeseen z piirretty jana muodostaa positiivisen reaaliakselin kanssa positiiviseen kiertosuuntaan. Huomataan, että määritelmän tilanteessa

$$(1.14) \quad z = x + iy = |z| \cos \varphi + i|z| \sin \varphi = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Jos $z = 0$, niin tämä esitys pätee mielivaltaisella φ , sillä $|z| = 0$. Tätä esitystä kutsutaan kompleksiluvun z *napaesitykseksi*.

1.15 Esimerkki. Olkoon $z = 1 + i\sqrt{3}$. Tällöin $|z| = (1 + 3)^{1/2} = 2$ ja $\arg z = \arccos(1/2) = \pi/3$.

Palautetaan mieleen, että z :n liittoluku on $\bar{z} = x - iy$. Koska sini on pariton funktio ja kosini parillinen, tästä seuraa helposti, että

$$(1.16) \quad \arg \bar{z} = -\arg z.$$

Tässä ja muissa vastaavissa kaavoissa on muistettava, että yhtäsuuruus pätee oikeastaan vain 2π :n monikertaa vaille.

Oletetaan, että $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ kuten yllä ja w on toinen kompleksiluku, jonka napaesitys on $w = |w|(\cos \theta + i \sin \theta)$. Tällöin käyttämällä trigonometristen funktioiden yhteenlaskukaavoja saamme

$$\begin{aligned} zw &= |z||w|(\cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta + i(\cos \varphi \sin \theta + \sin \varphi \cos \theta)) \\ &= |z||w|(\cos(\varphi + \theta) + i \sin(\varphi + \theta)). \end{aligned}$$

Olemme siis todistaneet seuraavan tärkeän tuloksen:

1.17 Lause. *Tulon moduli on modulien tulo: $|zw| = |z||w|$. Jos $z, w \neq 0$, niin tulon zw argumentti on argumenttien summa: $\arg zw = \arg z + \arg w$.*

Lauseella 1.17 on hyödyllinen geometrinen tulkinta: Kun $a \neq 0$ on kiinteä kompleksiluku, multiplikaatiokuvauksessa $z \mapsto az$ z :n moduli kerrotaan a :n modulilla $|a|$ ja z :n argumenttiin lisätään $\arg a$; toisin sanoen tämä kuvaus on *venytys* (tai kutistus) yhdistettynä *kiertoon*! Erityisesti kuvaus $z \mapsto iz$ on kierto positiiviseen suuntaan kulman $\pi/2$ (eli 90°) verran.

1.18 Seuraus. *Jos $z, w \in \mathbb{C}$ ja $w \neq 0$, niin*

$$\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}, \quad \arg \frac{z}{w} = \arg z - \arg w.$$

Erityisesti $|1/w| = 1/|w|$ ja $\arg(1/w) = -\arg w$.

Todistus. Koska $z = \frac{z}{w}w$, saadaan $|z| = \left| \frac{z}{w} \right| |w|$ ja $\arg z = \arg \frac{z}{w} + \arg w$. □

1.19 Esimerkki. Näiden tulosten avulla voidaan esimerkiksi luvun $(1+i\sqrt{3})/(1-i\sqrt{3})$ moduli ja argumentti päätellä suoraan ko. murtolauseketta sieventämättä: Koska kaikille kompleksiluvuille z on $|z/\bar{z}| = 1$ ja koska $\arg(1 \pm i\sqrt{3}) = \pm\pi/3$ (vrt. esimerkki 1.15 ja kaava (1.16)), saadaan

$$\left| \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \right| = 1, \quad \arg \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \pi/3 - (-\pi/3) = 2\pi/3.$$

Kompleksilukumerkinnöin voidaan monia tason geometrisia objekteja esittää kätevästi. Yksinkertainen esimerkki: koska $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ jokaiselle $z = x + iy$, tason yksikköympyrä voidaan kirjoittaa

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

Tämä antaa myös hieman vaihtoehtoisen tavan konstruoida kompleksilukujen napaesitys: Tiedämme, että jokainen yksikköympyrän piste $z_0 \in S^1$ voidaan esittää muodossa $z_0 = (\cos \varphi, \sin \varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi$, jossa $\varphi \in \mathbb{R}$. Jos $z \neq 0$ on mielivaltainen kompleksiluku, pätee seurauslauseen 1.18 nojalla $z/|z| \in S^1$. Erityisesti siis

$$z = |z| \frac{z}{|z|} = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \text{jossa } \varphi = \arg z.$$

Moivre'n ja Eulerin kaavat

Tutkimme seuraavaksi potenssiinkorotusta napaesityksen kannalta. Tämä edelleen kirkastaa kompleksilukujen ja trigonometrian välistä yhteyttä. Seuraava klassinen kaava on tärkeä.

1.20 Lause (Moivre'n kaava). *Jokaisella kokonaisluvulla n pätee*

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Todistus. Merkitään $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$, jolloin $|z| = 1$. Jos $n = 0$, niin väite on totta, sillä $z^0 = 1$. Oletetaan, että $n > 0$. Tällöin

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = z^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

lauseen 1.17 nojalla. Toisaalta jos $n < 0$, niin

$$z^{-1} = \bar{z} = \cos \varphi - i \sin \varphi = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)$$

ja soveltamalla todistuksen alkuosaa lukuun z^{-1} ja eksponenttiin $-n$, saamme tästä

$$z^n = (z^{-1})^{-n} = (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))^{-n} = \cos n\varphi + i \sin n\varphi,$$

mikä todistaa väitteen. □

Moivre'n kaavaa voidaan käyttää esimerkiksi trigonometrinen kaavojen johtamiseen.

1.21 Esimerkki. Pyritään lausumaan $\cos 3\varphi$ pelkästään kulman φ kosinin avulla. "Täydennetään" $\cos 3\varphi$ kompleksiluvuksi ja käytetään Moivre'n kaavaa:

$$\begin{aligned} \cos 3\varphi &= \operatorname{Re}(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 \\ &= \operatorname{Re}(\cos^3 \varphi + 3i \cos^2 \varphi \sin \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi - i \sin^3 \varphi) \\ &= \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi \\ &= 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi, \end{aligned}$$

sillä $\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi$.

1.22 Esimerkki. Lasketaan $(1 + i\sqrt{3})^6$. Esimerkin 1.15 perusteella näemme, että $1 + i\sqrt{3} = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$. Siten Moivre'n kaavan avulla saamme

$$(1 + i\sqrt{3})^6 = 2^6 (\cos \frac{6}{3}\pi + i \sin \frac{6}{3}\pi) = 64 (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 64.$$

Tarkastellaan hetki funktiota $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Lauseen 1.17 mukaan – eli viimekädessä kosinin ja sinin yhteenlaskukaavojen nojalla – pätee $f(\varphi + \theta) = f(\varphi)f(\theta)$. Siis f käyttäytyy kuten eksponenttifunktio!

Otammekin käyttöön seuraavan merkinnän, jota kutsutaan *Eulerin kaavaksi*:

$$(1.23) \quad e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Tässä siis eksponenttifunktio tulee määritellyksi puhtaasti imaginaarisille luvuille. Euler aikoinaan motivoi tämän identiteetin vertailemalla lausekkeiden sarjakehitelmiä. Esitämme Eulerin päättelyn tuonempana; tässä vaiheessa kurssia Eulerin kaavaa (1.23) kannattaa pitää vain lyhyenä ja käteväenä merkintätapana. Tulemme kuitenkin myöhemmin näkemään, että jos halutaan määritellä koko kompleksitasossa eksponenttifunktio siten, että se on kompleksisesti differentioituva (eli analyyttinen) ja yhtyy reaaliakselilla tuttuun reaaliseen eksponenttifunktioon, niin saatava funktio väistämättä toteuttaa imaginaariakselilla kaavan (1.23)!

Huomaa, että Eulerin kaavan mukaan $|e^{i\varphi}| = 1$ ja $\arg e^{i\varphi} = \varphi$. Edellä jo totesimme, että $e^{i(\varphi+\theta)} = e^{i\varphi}e^{i\theta}$. Lisäksi Moivre'n kaava saa kompaktin muodon

$$(1.24) \quad (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}.$$

Erityisesti $1/e^{i\varphi} = e^{-i\varphi}$. Kompleksiluvun z napaesitys (1.14) puolestaan saa muodon

$$(1.25) \quad z = re^{i\varphi}, \quad \text{jossa } r = |z|, \varphi = \arg z.$$

Tämän avulla voidaan laskea esimerkiksi seuraavasti: jos $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ ja $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, niin $z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$. Huomaa vielä, että φ :n funktiona $e^{i\varphi}$ on 2π -jaksollinen.

Kääntäen Eulerin kaavasta saadaan trigonometrisille funktioille esitykset (tarkista!)

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}), \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}).$$

Nämäkin ovat monesti hyvin käyttökelpoisia. Niiden avulla voi vaikkapa palauttaa mieleen trigonometristen funktioiden yhteenlaskukaavat; esimerkkinä

$$\begin{aligned} \cos(\varphi + \theta) &= \operatorname{Re} e^{i(\varphi+\theta)} = \operatorname{Re} e^{i\varphi} e^{i\theta} \\ &= \operatorname{Re} (\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= \cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta. \end{aligned}$$

1.26 Esimerkki. Lausutaan $\cos^4 \varphi$ muotoa $\cos n\varphi$ olevien lausekkeiden avulla:

$$\begin{aligned} \cos^4 \varphi &= \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right)^4 \\ &= \frac{1}{16} (e^{4i\varphi} + 4e^{3i\varphi} e^{-i\varphi} + 6e^{2i\varphi} e^{-2i\varphi} + 4e^{i\varphi} e^{-3i\varphi} + e^{-4i\varphi}) \\ &= \frac{1}{16} (e^{4i\varphi} + 4e^{2i\varphi} + 6 + 4e^{-2i\varphi} + e^{-4i\varphi}) \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{e^{i4\varphi} + e^{-i4\varphi}}{2} + 4 \frac{e^{i2\varphi} + e^{-i2\varphi}}{2} + 3 \right) \\ &= \frac{1}{8} (\cos 4\varphi + 4 \cos 2\varphi + 3). \end{aligned}$$

Binomiyhtälö napaesityksessä

Tarkastellaan luvun lopuksi *binomiyhtälön* $z^n = a$ ratkaisemista napaesityksen avulla. Tässä a on annettu kompleksiluku, ja kyseessä on siis luvun a n :nnen juuren $a^{1/n}$ kaikkien arvojen määrittäminen.

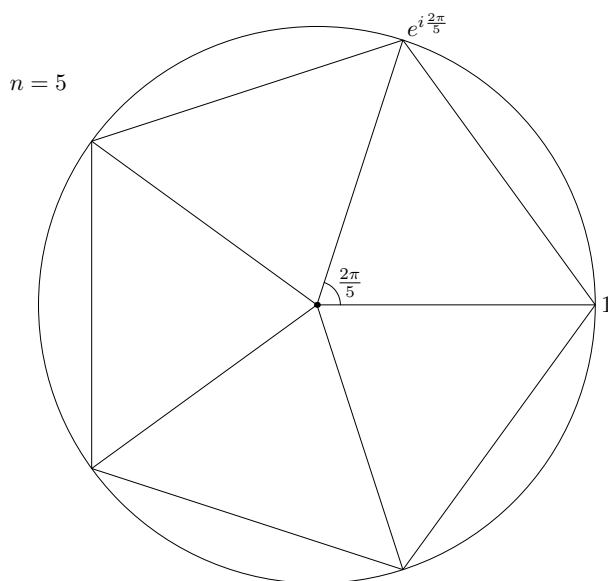
Jos $a = 0$, yhtälöllä on vain yksi ratkaisu $z = 0$ (miksi?). Oletamme, että $a \neq 0$. Olkoon a :lla napaesitys $a = |a|e^{i\theta}$, jossa $\theta = \arg a$. Vastaavasti $z = re^{i\varphi}$, jossa $r = |z|$ ja $\varphi = \arg z$. Nyt Moivre'n kaavan (1.24) avulla yhtälö $z^n = a$ saa muodon

$$r^n e^{in\varphi} = |a| e^{i\theta}.$$

Tämä toteutuu täsmälleen silloin, kun $r = |a|^{1/n}$ (positiivinen luku!) ja $n\varphi = \theta + 2\pi k$ eli $\varphi = \theta/n + 2\pi k/n$ jollakin kokonaisluvulla k . Vastaavia z :n arvoja on täsmälleen n erisuurta; esimerkiksi ne, jotka vastaavat k :n arvoja $0, 1, \dots, n-1$. Siis: tapauksessa $a \neq 0$ on luvulla $a^{1/n}$ kompleksitasossa n eri arvoa ja ne ovat (kun $\theta = \arg a$)

$$(1.27) \quad z = r e^{i\varphi}, \quad \text{jossa } r = |a|^{1/n} \text{ ja } \varphi = \theta/n + 2\pi k/n \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Eryteisesti tapauksessa $a = 1$ nähdään, että yhtälön $z^n = 1$ ratkaisut ovat yksikköympyrän pisteet $\epsilon_n^0 = 1$ ja $\epsilon_n^k = e^{i2\pi k/n}$, $k = 1, \dots, n-1$. Niitä kutsutaan n :nsiksi *ykkösenjuuriksi*, ja ne ovat yksikköympyrän sisään piirretyn säännöllisen n -kulmion kärjet (jos $n > 2$).



Yleisen binomiyhtälön $z^n = a$ ($a \neq 0$) tapauksessa voidaan puolestaan menetellä seuraavasti: Valitaan jokin juurista, esimerkiksi $z_0 = |a|^{1/n} e^{i\theta/n}$. Tällöin kaavoista (1.27) nähdään, että muut juuret ovat $z_k = z_0 \epsilon_n^k$, $k = 1, \dots, n-1$, jossa ϵ_n^k :t ovat edellä mainitut ykkösenjuuret.

1.28 Esimerkki. Yhtälön $z^4 = 1$ ratkaisut ovat $z = \pm 1, \pm i$. (Tarkista!) Saman asian näkee myös kirjoittamalla $z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = (z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i)$.

1.29 Esimerkki. Etsitään sitten yhtälön $z^4 = -1$ ratkaisut. Koska $-1 = e^{i\pi}$, yksi ratkaisu on $z_0 = e^{i\pi/4} = \cos \pi/4 + i \sin \pi/4 = (1 + i)/\sqrt{2}$.

Edellä opitun mukaisesti kaikki juuret ovat $z_k = z_0 \epsilon^k$, $k = 0, 1, 2, 3$, jossa luvut $\epsilon^k = e^{i \cdot 2\pi k/4}$ ovat itse asiassa edellisen esimerkin luvut. Siispä etsityt juuret ovat

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{1+i}{\sqrt{2}}, & z_1 &= z_0 \cdot i = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \\ z_2 &= z_0 \cdot (-1) = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, & z_3 &= z_0 \cdot (-i) = \frac{1-i}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Selvitä itsellesi harjoitustehtävänä, millaisten neliöiden kärkipisteinä ovat esimerkkien 1.28 ja 1.29 juuret (piirrä kuva)!

2 Kompleksitason topologiaa

Tarvitsemme tällä kurssilla muutamia topologian peruskäsitteitä, lähinnä samassa laajuudessa kuin Vektorianalyysin kurssilla. Kertaamme ja käymme läpi tässä luvussa lyhyesti näitä käsitteitä (jopa hieman tarvettamme laajemminkin). Niihin kuuluvat mm. avoimet ja suljetut joukot, kompleksilukujonojen suppeneminen ja funktioiden jatkuvuus. Sivuumme osittain yksityiskohdat ja todistukset. Tarkemmin ja yleisemmin asioita käsitellään kurssilla Topologia I ja sen oppikirjassa J. VÄISÄLÄ: *Topologia I*, Limes ry (4. painos, 2007).

Varsinkin tason topologiaa (tai yleisemmin metristä topologiaa) hyvin tunteva lukija voinee keskittyä tässä luvussa lähinnä esimerkkien opiskeluun.

Metriikka

Kompleksitason \mathbb{C} topologian määrittelee kahden pisteen $z, w \in \mathbb{C}$ välinen *etäisyys* eli *metriikka*

$$|z - w| = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2},$$

jossa $z = x + iy$ ja $w = u + iv$. Kyseessä on siis tavallinen \mathbb{R}^2 :n euklidinen etäisyys. Siten metrisenä topologisena avaruutena \mathbb{C} on sama kuin tuttu euklidinen taso \mathbb{R}^2 . On kuitenkin syytä katsoa, miten kyseinen topologia suhtautuu esimerkiksi kompleksilukujen laskutoimituksiin. Itse asiassa osoittautuu, että kompleksiluvuilla monet tarkastelut sujuvat täysin samalla tavalla kuin reaaliakselilla. Erityisesti pätee *kolmioepäyhtälö*

$$||z| - |w|| \leq |z - w| \leq |z| + |w|,$$

jolle esitimme kompleksisen todistuksen esimerkissä 1.12.

Avoimet ja suljetut joukot

Kun $z \in \mathbb{C}$ ja $r > 0$, käytämme seuraavia merkintöjä kompleksitason z -keskisille ja r -säteisille kiekkoille:

$$D(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < r\} \quad (\text{avoin kiekko})$$

$$\overline{D}(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| \leq r\} \quad (\text{suljettu kiekko})$$

Joukko $A \subset \mathbb{C}$ on *avoin*, mikäli jokaisella $z \in A$ on olemassa $r > 0$ siten, että $D(z, r) \subset A$. Joukko A on *suljettu*, jos sen komplementti $A^c = \mathbb{C} \setminus A$ on avoin.

2.1 Esimerkki. a) Jokainen kiekko $D(z, r)$ on avoin, sillä jos $w \in D(z, r)$ ja merkitään $s = r - |w - z| > 0$, niin $D(w, s) \subset D(z, r)$ yksinkertaisen kolmioepäyhtälöpäätelyn nojalla. Vastaavasti joukko $\bar{D}(z, r)$ on suljettu, sillä komplementti $\{w : |w - z| > r\}$ on avoin.

b) Koko kompleksitaso \mathbb{C} ja tyhjä joukko \emptyset ovat sekä suljettuja että avoimia.

Mitä tahansa avointa joukkoa, johon piste z sisältyy, kutsutaan z :n *ympäristöksi*. Kiekko $D(z, r)$ on erikoistapaus tästä.

Palautamme seuraavaksi mieleen, miten ominaisuudet ”avoin” ja ”suljettu” säilyvät yhdisteitä ja leikkauksia muodostettaessa.

2.2 Lause. a) *Avointen joukkojen mielivaltaiset yhdisteet ovat avoimia. Samoin niiden äärelliset leikkaukset ovat avoimia.*

b) *Suljettujen joukkojen mielivaltaiset leikkaukset ovat suljettuja. Samoin niiden äärelliset yhdisteet ovat suljettuja.*

Todistus. a) Oletetaan, että joukot A_j ($j \in I$), jossa $I \neq \emptyset$ on mielivaltainen indeksijoukko, ovat avoimia kompleksitasossa. Olkoon $z \in \bigcup_{j \in I} A_j$. Siis $z \in A_j$ jollain $j \in I$, ja koska kyseinen A_j on avoin, on olemassa $r > 0$, jolle $D(z, r) \subset A_j$. Mutta tällöin myös $D(z, r) \subset \bigcup_{j \in I} A_j$. Siten yhdiste $\bigcup_{j \in I} A_j$ on avoin.

Oletetaan sitten, että A_1, \dots, A_n ovat avoimia. Olkoon $z \in \bigcap_{j=1}^n A_j$. Tällöin on jokaisella $j = 1, \dots, n$ olemassa $r_j > 0$, jolle $D(z, r_j) \subset A_j$. Olkoon r pienin luvuista r_j (mahdollista, koska lukuja on vain äärellinen määrä). Tällöin $D(z, r) \subset \bigcap_{j=1}^n D(z, r_j) \subset \bigcap_{j=1}^n A_j$. Siten leikkaus $\bigcap_{j=1}^n A_j$ on avoin.

b) Sovelletaan a-kohtaa annettujen suljettujen joukkojen komplementteihin. \square

Muista, ettei avointen joukkojen mielivaltainen leikkaus ole välttämättä avoin. Esimerkiksi käy leikkaus $\bigcap_{r>0} D(a, r) = \{a\}$. Vastaavasti mielivaltaisen suljettujen joukkojen yhdisteen ei tarvitse olla suljettu.

Sisus, reuna ja sulkeuma

Olkoon $A \subset \mathbb{C}$ mielivaltainen joukko. Sen *sulkeuma* \bar{A} muodostuu niistä pisteistä $z \in \mathbb{C}$, joilla jokainen kiekko $D(z, r)$ sisältää A :n pisteitä:

$$\bar{A} = \{z \in \mathbb{C} : D(z, r) \cap A \neq \emptyset \text{ kaikilla } r > 0\}$$

Piste $z \in A$ on A :n *sisäpiste*, jos on olemassa $r > 0$ siten, että $D(z, r) \subset A$. Piste $z \in \mathbb{C}$ on puolestaan A :n *reunapiste*, jos jokainen kiekko $D(z, r)$ sisältää sekä A :n että sen komplementin A^c pisteitä. Näiden joukoille käytetään seuraavia merkintöjä ja nimityksiä:

$$\text{int } A = \{z \in \mathbb{C} : z \text{ on } A\text{:n sisäpiste}\} \quad (A\text{:n sisus})$$

$$\partial A = \{z \in \mathbb{C} : z \text{ on } A\text{:n reunapiste}\} \quad (A\text{:n reuna})$$

Aina pätee

$$\bar{A} = \text{int } A \cup \partial A \quad (\text{erillinen yhdiste}),$$

ja $\text{int } A$ on laajin avoin joukko, joka sisältyy A :han, sekä \overline{A} on suppein suljettu joukko, joka sisältää A :n. Erityisesti: Jos A on avoin, niin $A = \text{int } A$, ja jos A on suljettu, niin $A = \overline{A}$.

2.3 Esimerkki. Tarkastellaan kiekkoja $D(z, r)$ ja $\overline{D}(z, r)$. Kummankin sisus on avoin kiekko $D(z, r)$, ja kummankin sulkeuma on suljettu kiekko $\overline{D}(z, r)$. Kummankin reuna on ympyrä $\{w : |w - z| = r\}$.

Piste $z \in \mathbb{C}$ on joukon A *kasautumispiste*, jos jokaisella $r > 0$ kiekko $D(z, r)$ sisältää äärettömän monta A :n pistettä. Yhtäpitävästi riittää vaatia, että jokainen $D(z, r)$ sisältää ainakin yhden A :n pisteen, joka on $\neq z$.

2.4 Lause. Joukon $A \subset \mathbb{C}$ sulkeuma \overline{A} saadaan lisäämällä A :han kaikki A :n kasautumispisteet. Siten A on suljettu jos ja vain jos A sisältää kaikki kasautumispisteensä.

Todistus. Todetaan ensin, että kaikki kasautumispisteet sisältyvät sulkeumaan \overline{A} . Jos nimittäin z on A :n kasautumispiste, niin jokainen kiekko $D(z, r)$ sisältää A :n pisteitä (jopa äärettömän monta). Siten määritelmän mukaan $z \in \overline{A}$.

Kääntäen oletetaan, että z on sulkeuman \overline{A} piste, joka ei kuitenkaan kuulu A :han. On näytettävä, että z on kasautumispiste. Jos $r > 0$, niin ehdosta $z \in \overline{A}$ seuraa, että $D(z, r) \cap A$ sisältää jonkin A :n pisteen a . Koska $z \notin A$, on välttämättä $a \neq z$. Näin z on kasautumispiste. \square

Kompleksilukujonojen suppeneminen

Kompleksilukujen muodostamien jonojen suppeneminen määritellään aivan kuten reaalisten jonojen suppeneminen.

2.5 Määritelmä. Olkoon $(z_n) = (z_n)_{n=1}^{\infty}$ jono kompleksilukuja. Jono (z_n) *suppenee* kohti lukua $z \in \mathbb{C}$, jos jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa $N(\epsilon)$ siten, että

$$|z_n - z| < \epsilon \quad \text{aina kun } n > N(\epsilon).$$

Lukua z kutsutaan tällöin ko. jonon *raja-arvoksi*, ja merkitsemme $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ tai lyhyemmin $\lim z_n = z$ tai $z_n \rightarrow z$. Jos jono ei suppene, se *hajaantuu*.

2.6 Lause. Olkoon (z_n) jono kompleksilukuja ja $z \in \mathbb{C}$.

- a) $z_n \rightarrow z$ jos ja vain jos $\text{Re } z_n \rightarrow \text{Re } z$ ja $\text{Im } z_n \rightarrow \text{Im } z$.
- b) Jos $z_n \rightarrow z$, niin $|z_n| \rightarrow |z|$.

Todistus. a) Kolmioepäyhtälöstä saadaan (miten?) arviot

$$|z_n - z| \leq |\text{Re } z_n - \text{Re } z| + |\text{Im } z_n - \text{Im } z| \leq 2|z_n - z|,$$

ja väite seuraa näistä.

- b) Kolmioepäyhtälön vasemman puolen nojalla $||z_n| - |z|| \leq |z_n - z|$. \square

2.7 Esimerkki. a) Jos $z_n = (1 + 1/n) + i(1 - 1/n)$, niin $z_n \rightarrow 1 + i$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (in + 1)/(n + i) = i$, sillä jos $\epsilon > 0$, niin

$$\left| \frac{in + 1}{n + i} - i \right| = \left| \frac{in + 1 - (in - 1)}{n + i} \right| = \frac{2}{|n + i|} < \frac{2}{n} < \epsilon,$$

kun $n > 2/\epsilon$. Huomaa tässä, että $|n + i| = \sqrt{n^2 + 1} > n$.

c) Jos $z_n = e^{in\pi} = \cos n\pi + i \sin n\pi$, niin (z_n) hajaantuu. Miksi?

Lukujonojen raja-arvojen laskusäännöt pätevät kompleksiluvuille aivan samoin kuin reaalityöille. Pohjimmiltaan tämä johtuu siitä, että kompleksilukujen laskutoimitukset noudattavat samoja lakeja kuin reaalityöiden ja että moduli suhtautuu niihin kuten itseisarvo reaalityöiden laskutoimituksiin. Seuraavan lauseen todistuksen jättämmekin harjoitustehtäväksi; se sujuu muodollisesti täsmälleen samalla tavalla kuin reaalityöillä.

2.8 Lause. Jos $\lim z_n = z$ ja $\lim w_n = w$, niin $\lim(z_n + w_n) = z + w$ ja $\lim z_n w_n = zw$ sekä $\lim(z_n/w_n) = z/w$ (mikäli $w \neq 0$).

Funktion jatkuvuus

Tarkastelemme nyt kompleksimuuttujan kompleksiarvoisia funktioita $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, jossa $A \subset \mathbb{C}$ on epätyhjä. Myöhemmin kun ryhdymme tutkimaan ns. analyyttisiä funktioita (funktioiteorian pääaihepiiri), lähtöjoukko A tulee lähes poikkeuksetta olemaan avoin, mutta emme tee tätä oletusta vielä tässä luvussa.

Kompleksimuuttujan funktion jatkuvuus määritellään samalla tavalla kuin reaalityössä tilanteessa.

2.9 Määritelmä. Olkoon $A \subset \mathbb{C}$ ja $f: A \rightarrow \mathbb{C}$. Funktio f on *jatkuva pisteessä* $a \in A$, jos jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta = \delta(\epsilon)$ siten, että

$$|f(z) - f(a)| < \epsilon, \quad \text{kun } z \in A \cap D(a, \delta).$$

Funktio f on *jatkuva joukossa* A , jos se on jatkuva jokaisessa A :n pisteessä.

Funktion $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ reaaliosa $\operatorname{Re} f$ ja imaginaariosa $\operatorname{Im} f$ määritellään pisteittäin kaavoilla

$$(\operatorname{Re} g)(z) = \operatorname{Re}(g(z)), \quad (\operatorname{Im} g)(z) = \operatorname{Im}(g(z)).$$

Huomaa, että nämä ovat reaalityöisiä funktioita, joille jatkuvuuden käsite on täsmälleen sama kuin vektorianalyysin kurssilla käsitelty jatkuvuus. Kolmioepäyhtälö osoittaa (vrt. lause 2.6), että f on jatkuva pisteessä a jos ja vain jos $\operatorname{Re} f$ ja $\operatorname{Im} f$ ovat molemmat jatkuvia pisteessä a .

2.10 Esimerkki. Funktio $f(z) = z^2$ on jatkuva koko \mathbb{C} :ssä. Jos nimittäin $a \in \mathbb{C}$ ja $\epsilon > 0$, niin

$$|f(z) - f(a)| = |(z + a)(z - a)| \leq (1 + 2|a|)|z - a| < \epsilon,$$

kun $|z - a| < 1$ (jolloin $|z| < 1 + |a|$) ja lisäksi $|z - a| < \epsilon/(1 + 2|a|)$.

Käytännössä on kovin työlästä todistaa annetun funktion jatkuvuus lähtien jatkuvuuden määritelmästä. Siksi turvaudumme usein seuraaviin perustuloksiin; nämäkin todistetaan täysin samoin kuin vastaavat säännöt reaalfunktiolle.

2.11 Lause. Oletetaan, että $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ ja $g: A \rightarrow \mathbb{C}$ ovat jatkuvia pisteessä $a \in A$. Tällöin funktiot $f + g$ ja fg ovat jatkuva a :ssa. Lisäksi jos $g(a) \neq 0$, niin funktio f/g on määritelty ainakin joukossa $A \cap D(a, r)$ kyllin pienellä $r > 0$ ja jatkuva a :ssa.

Samoin pätee, että jatkuvista funktioista yhdistetty funktio on jatkuva:

2.12 Lause. Olkoot $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ ja $g: A' \rightarrow \mathbb{C}$ funktioita siten, että $f(A) \subset A'$. Jos f on jatkuva pisteessä $a \in A$ ja g on jatkuva pisteessä $f(a)$, niin $g \circ f$ on jatkuva pisteessä a .

Lauseen 2.11 nojalla näemme esimerkiksi, että kaikki kompleksiset *polynomit*

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n \quad (a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C})$$

ovat jatkuvia koko kompleksitasossa \mathbb{C} . Samoin kaikki *rationaalifunktiot* $R(z) = P(z)/Q(z)$, jossa P ja Q ovat kompleksisia polynomeja, ovat jatkuvia niissä \mathbb{C} :n pisteissä, joissa $Q(z) \neq 0$.

Toisinaan on hyödyllistä tietää, että funktion jatkuvuus voidaan karakterisoida käyttämällä vain ympäristöjen (eli avoimen joukon) käsitettä tai myös jonojen avulla:

2.13 Lause. Olkoon $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ ja $a \in \mathbb{C}$. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

- a) f on jatkuva pisteessä a .
- b) Aina kun $V \subset \mathbb{C}$ on pisteen $f(a)$ ympäristö, on olemassa pisteen a ympäristö $U \subset A$, jolle $A \cap U \subset f^{-1}(V)$.
- c) Jokaisella jonolla (z_n) A :n pisteitä, jolle $z_n \rightarrow a$, on voimassa $f(z_n) \rightarrow f(a)$.

Todistus. Osoitetaan, että a ja b ovat yhtäpitävät, ja jätetään c:n yhtäpitävyys harjoitustehtäväksi.

Oletetaan, että f on jatkuva pisteessä a ja V on $f(a)$:n ympäristö eli avoin joukko, joka sisältää $f(a)$:n. Tällöin on olemassa $\epsilon > 0$, jolle $D(f(a), \epsilon) \subset V$, ja jatkuvuuden määritelmän nojalla voimme löytää luvun $\delta > 0$ siten, että jokaiselle $z \in A \cap D(a, \delta)$ pätee $f(z) \in D(f(a), \epsilon)$, mikä merkitsee, että $A \cap D(a, \delta) \subset f^{-1}(D(f(a), \epsilon)) \subset f^{-1}(V)$. Siispä $U = D(a, \delta)$ on halutunlainen ympäristö a :lle.

Kääntäen: jos oletetaan b-ehto ja $\epsilon > 0$ on mielivaltainen, niin valitsemalla $V = D(f(a), \epsilon)$ ja sen jälkeen $\delta > 0$ niin pieneksi, että $D(a, \delta) \subset U$, nähdään, että f on jatkuva pisteessä a . \square

Tarkastellaan vielä seuraavaa esimerkkiä, joka kertoo siitä, kuinka aikaisempia lauseita voidaan soveltaa.

2.14 Esimerkki. Olkoon $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\}$ oikeanpuoleinen suljettu puolitaso. Kaavan (1.25) mukaan jokainen $z \in A$ voidaan esittää muodossa $z = re^{i\varphi(z)}$, jossa

$r = |z| \geq 0$ ja $\varphi(z) = \arg z \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Huomaa, että tällä valinnalla $\varphi(z)$ on yksikäsitteinen lukuunottamatta pistettä $z = 0$, jossa myös $r = 0$. Siksi seuraava funktio on hyvin määritelty, kun $a > 0$ ja $b > 0$ ovat reaalisia vakioita:

$$F(z) = F(re^{i\varphi(z)}) = r^a e^{ib\varphi(z)}, \quad z = re^{i\varphi(z)} \in A.$$

Osoitetaan, että F on jatkuva A :ssa.

Aluksi havaitaan, että F on jatkuva origossa: Pätee nimittäin $|F(z) - F(0)| = |F(z)| \leq |z|^a$, ja jos $\epsilon > 0$ on annettu, tämä on $< \epsilon$ kunhan vain $|z| < \epsilon^{1/a}$.

Olkoon sitten $a \in A \setminus \{0\}$. Osoitamme ensin, että $z \mapsto \varphi(z)$ on jatkuva a :ssa. Olkoon $\alpha = \varphi(a) = \arg a \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Tällöin pätee (piirrä kuva!) $|\varphi(z) - \alpha| \leq \theta$, jossa

$$\sin \theta = \frac{|z - a|}{|a|},$$

kunhan $|z - a|$ on kyllin pieni. Koska $x < \frac{\pi}{2} \sin x$, kun $0 < x < \frac{\pi}{2}$, saadaan

$$|\varphi(z) - \alpha| \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{|z - a|}{|a|} \rightarrow 0, \quad \text{kun } z \rightarrow a.$$

Näin $z \mapsto \varphi(z)$ on jatkuva a :ssa. Koska lisäksi $z \mapsto |z|$ on jatkuva (kolmioepäyhtälön vasemman puolen nojalla!), niin funktion

$$z \mapsto F(z) = |z|^a (\cos(b\varphi(z)) + i \sin(b\varphi(z)))$$

jatkuvuus a :ssa seuraa yhdistettyjen funktioiden ja tulon jatkuvuutta koskevista lauseista, kunhan pidämme tunnettuna sinin ja kosinin sekä reaalisen potenssifunktion jatkuvuuden.

Funktion raja-arvo

Tarkastelemme funktiota $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, jossa $A \subset \mathbb{C}$ on epätyhjä, ja tavoitteenamme on määrittellä ja laskea sille raja-arvoja $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$.

Ensiksi on otettava kantaa siihen, millaisille pisteille a tämä on ylipäätään mielekäs kysymys. Kuten reaalinmuuttujan analyysistä muistetaan, funktion raja-arvo jossakin pisteessä a määräytyy arvoista, joita funktio saa pisteen a ”lähellä” (so. ympäristössä), mutta funktion arvolla itse pisteessä a ei ole merkitystä; itse asiassa funktion ei tarvitse olla edes määritelty a :ssa. On siis syytä vaatia, että jokaisessa kiekossa $D(a, r)$ on A :n pisteitä, jotka ovat $\neq a$; ts. a on oletettava joukon A kasautumispisteeksi.

Meillä tyypillisesti funktion f määrittelyjoukko A tulee olemaan jokin avoin joukko ja a sen reunapiste. Tällöin a on automaattisesti myös kasautumispiste (ks. lause 2.4). (Esimerkiksi analyyttisen funktion määritelmässä seuraavan luvun alussa on tutkittava annetun funktion erotusosamäärän raja-arvoa, kun kyseinen funktio on määritelty a :n ympäristössä.)

2.15 Määritelmä. Oletetaan, että $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ ja a on joukon A kasautumispiste. Funktiolla f on *raja-arvo* w pisteessä a , jos jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ siten, että

$$|f(z) - w| < \epsilon, \quad \text{kun } z \in A \cap D(a, \delta), \quad z \neq a.$$

Tällöin merkitään $w = \lim_{z \rightarrow a} f(z)$, tai jos halutaan korostaa, minkä joukon suhteen raja-arvo on laskettu, esimerkiksi

$$w = \lim_{A \ni z \rightarrow a} f(z).$$

Toteamme ilman todistusta, että funktioiden summia, tuloja ja osamääriä sekä yhdistelmiä koskevat raja-arvojen laskusäännöt ovat voimassa samaan tapaan kuin reaaliuuttujan funktioilla (vrt. myös lauseet 2.8, 2.11 ja 2.12).

Palautetaan myös mieleen raja-arvon yhteys funktion jatkuvuuteen. Olkoon $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ ja $a \in A$. On kaksi mahdollisuutta: Piste a voi olla A :n kasautumispiste; tällöin f on jatkuva a :ssa jos ja vain jos $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a)$. Muussa tapauksessa a on A :n *erakkopiste* (eli $A \cap D(a, r) = \{a\}$ kyllin pienillä r), jolloin f on automaattisesti jatkuva a :ssa.

Raja-arvon karakterisointi jonojen avulla saa seuraavan muodon (vrt. lause 2.13, todistus harjoitustehtävänä). Tämä kriteeri on usein käyttökelpoinen silloin, kun halutaan osoittaa, että jollakin funktiolla ei ole raja-arvoa pisteessä a : pyritään etsimään kaksi a :ta kohti suppenevaa jonoa, joita ”pitkin” f saa erisuuret raja-arvot.

2.16 Lause. *Oletetaan, että $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ ja a on A :n kasautumispiste. Tällöin $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = w$ jos ja vain jos pätee seuraava ehto: aina kun (z_n) on jono joukon $A \setminus \{a\}$ pisteitä, jolle $z_n \rightarrow a$, niin $f(z_n) \rightarrow w$.*

2.17 Esimerkki. a) Kun $z \rightarrow 0$,

$$\frac{1}{z^2 - z} + \frac{1}{z} = \frac{1}{z(z-1)} + \frac{1}{z} = \frac{1 + (z-1)}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} \rightarrow -1.$$

b) Onko funktiolla $f(z) = z/\bar{z}$ ($z \neq 0$) raja-arvoa origossa? Pannaan merkille, että reaaliakselilla on $\bar{z} = z$ ja siten $f(z) = 1$, kun taas imaginaariakselilla on $\bar{z} = -z$ ja siten $f(z) = -1$. Niinpä esimerkiksi $f(1/n) \rightarrow 1$ ja $f(i/n) \rightarrow -1$ vaikka jonot $(1/n)$ ja (i/n) molemmat suppenevat origoon. Näin ollen f :llä ei ole raja-arvoa origossa.

Itse asiassa napaesityksen $z = re^{i\varphi}$ avulla nähdään, että $f(re^{i\varphi}) = e^{i\varphi}/e^{-i\varphi} = e^{2i\varphi}$, kun $r > 0$. Tämä osoittaa, että f :llä on vakioarvo jokaisella origon kautta kulkevalla suoralla, josta origo on poistettu. Jos φ on kyseisen suoran ja positiivisen reaaliakselin välinen kulma ja annetaan sen kasvaa arvosta 0 arvoon π , vastaava f :n arvo kiertää vakionopeudella vastapäivään yksikköympyrän kehän pisteestä 1 lähtien. (Piirrä kuva!)

Yhtenäisyydestä

Muutamissa kohdin kurssilla tarvitsemme joitakin tietoja kompleksitason osajoukkojen yhtenäisyydestä. Itse asiassa helpompi polkuyhtenäisyyden käsite on meille riittävä ja myös käyttökelpoisempi. Viittaamme lisätietojen ja tulosten todistusten osalta jälleen kurssiin Topologia I. Lukija voinee sivuuttaa tämän jakson ensimmäisellä lukukerralla ja palata siihen myöhemmin sitä mukaa kun tarvetta ilmenee.

Oletamme koko ajan, että A on kompleksitason osajoukko. Havainnollisesti sanoen A on yhtenäinen silloin, kun sitä ei voi jakaa avoimien joukkojen avulla pistevieraisiin osiin:

2.18 Määritelmä. Joukko A on *epäyhtenäinen*, jos on olemassa avoimet $U, V \subset \mathbb{C}$ siten, että a) $A \subset U \cup V$, b) $U \cap V \cap A = \emptyset$ ja c) $U \cap A \neq \emptyset \neq V \cap A$. Muuten A on *yhtenäinen*.

Palautetaan mieleen, että jatkuvaa kuvausta $\gamma: [a, b] \rightarrow A$ ($a < b$) sanotaan joukon A *poluksi*. Tarvittaessa voimme kirjoittaa

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t), \quad a \leq t \leq b,$$

jossa $\gamma_1 = \operatorname{Re} \gamma$ ja $\gamma_2 = \operatorname{Im} \gamma$. Polku γ *yhdistää* pisteet $\gamma(a)$ ja $\gamma(b)$, joita kutsutaan ko. polun *päättepisteiksi*.

Jos $z, w \in \mathbb{C}$ ovat annettuja, voidaan muodostaa *janapolku*

$$\gamma(t) = z + t(w - z) = (1 - t)z + tw, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

joka yhdistää pisteet $z = \gamma(0)$ ja $w = \gamma(1)$. Tämän kuvajoukko $\gamma([0, 1])$ on *jana*, jolle voimme käyttää merkintää $[z, w]$, näin yleistäen lukusuoran suljetun välin (eli janan) merkinnän. Äärellinen yhdiste peräkkäisistä janoista, ts. joukko muotoa

$$\operatorname{mur}(z_0, z_1, \dots, z_n) = [z_0, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup \dots \cup [z_{n-1}, z_n],$$

on puolestaan *murtoviiva*, joka yhdistää pisteet z_0 ja z_n .

2.19 Määritelmä. a) A on *polkuyhtenäinen*, jos jokainen pari $z, w \in A$ voidaan yhdistää A :n polulla.

b) A on *murtoviivayhtenäinen*, jos jokainen pari $z, w \in A$ voidaan yhdistää murtoviivalla A :ssa.

c) A on *konvekksi*, jos jokainen pari $z, w \in A$ voidaan yhdistää A :n janapolulla.

Olennaista näissä määritelmässä on, että annetut pisteet yhdistävä polku (tai paremminkin sen kuvajoukko) sisältyy kokonaisuudessaan joukkoon A . Selvästi aina on voimassa implikaatiot: ”konvekksi” \Rightarrow ”murtoviivayhtenäinen” \Rightarrow ”polkuyhtenäinen”. Lisäksi pätee:

2.20 Lause. *Jos A on polkuyhtenäinen, se on yhtenäinen.*

Mitään näistä implikaatioista ei voi kääntää yleiselle \mathbb{C} :n osajoukolle A . Jatkossa tulemme kuitenkin pääasiassa työskentelemään avoimissa joukoissa, ja silloin tilanne on paljon miellyttävämpi:

2.21 Lause. *Oletetaan, että $A \subset \mathbb{C}$ on avoin. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:*

- a) A on yhtenäinen.
- b) A on polkuyhtenäinen.
- c) A on murtoviivayhtenäinen.

Avoin joukko, jolla on jokin (ja siis kaikki) näistä ominaisuuksista, on monessa mielessä luonnollinen alusta tehdä matemaattista analyysiä. Tällaisella joukolla onkin oma nimityksensä:

2.22 Määritelmä. Avoin ja yhtenäinen joukko on *alue*.

2.23 Esimerkki. a) Jokainen avoin kiekko $D(z, r)$ on konvekksi alue.

b) Vaakasuora yhdensuuntaisvyö $\{z : a < \operatorname{Im} z < b\}$ ($a < b$) ja ylempi puolitaso $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ ovat konvekseja alueita.

c) Punkteerattu taso $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja negatiivista reaaliakselia pitkin aukileikattu taso $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ovat alueita. Ne eivät ole konvekseja, mutta jokainen pistepari voidaan niissä yhdistää kahdesta janasta koostuvalla murtoviivalla (totea tämä kuvan avulla).

Yhtenäisyys ja polkuyhtenäisyys ovat kumpikin ominaisuuksia, jotka säilyvät jatkuvassa kuvauksessa:

2.24 Lause. *Olkoon $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ jatkuva. Jos A on yhtenäinen (vast. polkuyhtenäinen), myös $f(A)$ on yhtenäinen (vast. polkuyhtenäinen).*

Todistus. Polkuyhtenäisyydelle todistus on hyvin helppo: Olkoot $f(z)$ ja $f(w)$ kuvan $f(A)$:n pisteitä, jossa $z, w \in A$. Jos A on polkuyhtenäinen, voidaan valita polku $\gamma: [a, b] \rightarrow A$, joka yhdistää z :n ja w :n. Tällöin $f \circ \gamma$ on $f(A)$:n polku, joka yhdistää $f(z)$:n ja $f(w)$:n. \square

Lopuksi muutama sana (yhtenäisistä) komponenteista. Jos joukko A on epäyhtenäinen, se voidaan osittaa pistevieraisiin maksimaalisiin yhtenäisiin osajoukkoihinsa, joita kutsutaan A :n komponenteiksi. Tarkemmin sanoen: Jokaisella $z \in A$ voidaan määritellä A :n osajoukko

$$C(z, A) = \bigcup \{A' : z \in A' \subset A, A' \text{ yhtenäinen}\}.$$

Jokainen joukko $C(z, A)$ on yhtenäinen: kyseessä on laajin yhtenäinen A :n osajoukko, joka sisältää pisteen z . Tästä seuraa, että kahta eri pistettä z vastaavat joukot ovat joko samat tai erilliset. Koska joukkojen $C(z, A)$ ($z \in A$) yhdiste on selvästi A , nähdään, että kukin A :n piste kuuluu täsmälleen yhteen tällaiseen joukkoon eli *komponenttiin*.

Jos A on avoin, niin kaikki sen komponentit ovat myös avoimia ja siis alueita. Tämä seuraa siitä, että jos z on mielivaltainen A :n piste, niin $D(z, r) \subset A$ jollakin $r > 0$, ja koska kiekot ovat aina yhtenäisiä (jopa konvekseja), $D(z, r)$ sisältyy kokonaisuudessaan samaan komponenttiin kuin z .

2.25 Esimerkki. Olkoon $S^1 = \{z : |z| = 1\}$ yksikköympyrä ja $A = \mathbb{C} \setminus S^1$. A on avoin ja epäyhtenäinen. Sillä on kaksi komponenttia: avoin kiekko $D(0, 1)$ ja joukko $\{z : |z| > 1\}$.

3 Analyttiset funktiot

Määrittelemme aluksi kompleksisen derivaatan käsitteen ja analyttiset funktiot ja esitämme joitakin niiden alkeisominaisuuksia, kuten derivointisääntöjä. Tämän jälkeen johdamme Cauchyn ja Riemannin yhtälöt; ne ovat ensimmäisen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälöitä, jotka karakterisoivat analyttisten funktioiden reaali- ja imaginaariosat.

Kompleksinen derivaatta

3.1 Määritelmä. Olkoon $A \subset \mathbb{C}$ epätyhjä ja $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ jokin funktio.

a) Jos z_0 on joukon A sisäpiste, niin funktiolla f on (*kompleksinen*) *derivaatta* $f'(z_0)$ pisteessä z_0 , mikäli on olemassa erotusosamäärän raja-arvo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0).$$

On tärkeätä huomata, että tässä h on kompleksiluku ja raja-arvo vaaditaan kompleksisessa mielessä (lähestyypä h nollaa ”miten tahansa” kompleksitasossa). Koska z_0 on A :n sisäpiste, $z_0 + h \in A$ kunhan vain $|h|$ on kyllin pieni.

b) f on *analyttinen pisteessä* $z_0 \in A$, mikäli on olemassa avoin kiekko $D(z_0, r) \subset A$ siten, että f :llä on kompleksinen derivaatta jokaisessa ko. kiekon pisteessä.

c) Jos A on avoin, f on *analyttinen joukossa* A , mikäli se on analyttinen jokaisessa A :n pisteessä tai yhtäpitävästi sillä on kompleksinen derivaatta jokaisessa A :n pisteessä.

Tarvittaessa voidaan käyttää derivaattafunktiolle muitakin merkintöjä, esimerkiksi $\frac{d}{dz}f(z) = f'(z)$.

Kompleksisen derivaatan määritelmä on pinnallisesti hyvin samankaltainen kuin tavallisen reaalisen derivaatan määritelmä. Sillä on kuitenkin paljon vahvemmat ominaisuudet ja laajakantoisemmat seuraukset. Tulemme esimerkiksi todistamaan myöhemmin, että jokainen analyttinen funktio on itse asiassa äärettömän monta kertaa derivoituva! Tämä ei tietenkään päde yhden reaalimuuttujan funktioille. Selvitämme kompleksisen derivaatan ja reaalisten (osittais)derivaattojen suhdetta hieman myöhemmin, kun puhumme Cauchyn ja Riemannin yhtälöistä.

3.2 Esimerkki. a) Vakiofunktio $f(z) \equiv c$, jossa $c \in \mathbb{C}$, on analyttinen koko \mathbb{C} :ssä ja sen derivaatta on 0.

b) Olkoon $f(z) = az$, jossa $a \in \mathbb{C}$. Tällöin

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{ah}{h} = a \rightarrow a,$$

kun $h \rightarrow 0$. Siten f on analyyttinen \mathbb{C} :ssä ja $f'(z) = a$. Palautetaan mieleen, että jos $a > 0$ (ts. a on positiivinen reaaliluku), niin f on homotetia eli venytys tai kutistus origosta lähtevien puolisuorien suunnassa. Jos taas $a = e^{i\alpha}$, f on kierto origon ympäri kulman α verran. Yleisesti jos $a \neq 0$ ja a :n napaesitys on $a = |a|e^{i\alpha}$, nähdään, että $f(z) = |a|e^{i\alpha}z$ on yhdistelmä mainittuja kahta tyyppiä olevista muunnoksista.

c) Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Tutkitaan potenssifunktiota z^n . Olkoon $z_0 \in \mathbb{C}$ ja $h \neq 0$. Tällöin

$$(z_0 + h)^n - z_0^n = h \cdot ((z_0 + h)^{n-1} + (z_0 + h)^{n-2}z_0 + \dots + (z_0 + h)z_0^{n-2} + z_0^{n-1}),$$

joten jakamalla h :lla puolittain saamme

$$\frac{(z_0 + h)^n - z_0^n}{h} = (z_0 + h)^{n-1} + (z_0 + h)^{n-2}z_0 + \dots + (z_0 + h)z_0^{n-2} + z_0^{n-1},$$

joka lähestyy lukua nz_0^{n-1} , kun $h \rightarrow 0$. Potenssifunktio z^n on siis analyyttinen koko kompleksitasossa ja sen derivaatta on nz^{n-1} .

d) Tutkitaan funktiota $f(z) = \bar{z}$. Jos $h = |h|e^{i\varphi} \neq 0$, niin

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\bar{h}}{h} = \frac{e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi}} = e^{-2i\varphi}.$$

Mutta tällä on erisuuri vakioarvo kullakin origon kautta kulkevalla suoralla (vrt. esim. 2.17b) ja siten ei raja-arvoa, kun $h \rightarrow 0$. Siis f :llä ei ole kompleksista derivaattaa missään pisteessä. Huomaa kuitenkin, että tason \mathbb{R}^2 kuvauksena tulkittuna $f(x, y) = (x, -y)$ on jopa \mathbb{R} -lineaarinen ja erityisesti sen kummallakin koordinaattifunktiolla on kaikkien kertalukujen osittaisderivaatat. Opetus: Vaikka kuvaus olisi reaalfunktiona hyvinkin siisti ja sileä, sillä ei aina ole kompleksista derivaattaa!

Derivointisääntöjä

Osoittautuu, että kompleksinen derivaatta noudattaa samanlaisia laskusääntöjä kuin reaaliuuttujan derivaatta. Näiden johtamisessa ja muulloinkin on usein kätevää muotoilla derivaatan olemassaolo seuraavasti:

3.3 Apulause. *Funktiolla f on pisteessä z_0 derivaatta $f'(z_0) = a$ jos ja vain jos on voimassa kehitelmä*

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + ah + h\epsilon(h)$$

kaikille h jossakin 0 :n ympäristössä ja jossa $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$.

Tässä lauseke $\epsilon(h)$ tietysti riippuu myös z_0 :sta ja f :stä, joten selvyuden vaatiessa voidaan esimerkiksi kirjoittaa $\epsilon_f(h; z_0)$. Tämän kehitelmän avulla nähdään heti, että derivoituvuudesta seuraa funktion jatkuvuus pisteessä z_0 (ts. $f(z_0 + h) \rightarrow f(z_0)$, kun $h \rightarrow 0$).

Todistus. Jos $f'(z_0) = a$, kyseinen kehitelmä totetuu, kun määritellään $\epsilon(0) = 0$ ja $\epsilon(h) = (f(z_0 + h) - f(z_0))/h - a$. Käärtäen, jos annettu kehitelmä on voimassa, niin $(f(z_0 + h) - f(z_0))/h = a + \epsilon(h) \rightarrow a$, kun $h \rightarrow 0$. \square

3.4 Lause. Oletetaan, että f ja g ovat kompleksisesti derivoituvia pisteessä $z_0 \in \mathbb{C}$. Tällöin:

a) $f \pm g$ ovat derivoituvia z_0 :ssa ja

$$(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0).$$

b) fg on derivoituva z_0 :ssa ja

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

c) Jos $g(z_0) \neq 0$, niin f/g on määritelty jossain z_0 :n ympäristössä ja derivoituva z_0 :ssa sekä

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

Todistus. Kun $|h|$ on riittävän pieni, pätevät yo. apulauseen mukaiset kehitelmät

$$(3.5) \quad \begin{aligned} f(z_0 + h) &= f(z_0) + f'(z_0)h + h\epsilon_f(h), \\ g(z_0 + h) &= g(z_0) + g'(z_0)h + h\epsilon_g(h), \end{aligned}$$

jossa $\epsilon_f(h)$ ja $\epsilon_g(h)$ lähestyvät 0:aa, kun $h \rightarrow 0$.

a) Summaamalla tai vähentämällä toisistaan nämä kehitelmät saadaan

$$f(z_0 + h) \pm g(z_0 + h) = f(z_0) \pm g(z_0) + (f'(z_0) \pm g'(z_0))h + h(\epsilon_f(h) \pm \epsilon_g(h)).$$

Tässä $\epsilon_f(h) \pm \epsilon_g(h) \rightarrow 0$, kun $|h| \rightarrow 0$, joten funktioilla $f \pm g$ on vaadittua muotoa olevat kehitelmät.

b) Kertomalla kehitelmät (3.5) puolittain keskenään saadaan

$$(fg)(z_0 + h) = (fg)(z_0) + (f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0))h + h\epsilon(h),$$

jossa

$$\epsilon(h) = hf'(z_0)g'(z_0) + (f(z_0) + hf'(z_0))\epsilon_g(h) + (g(z_0) + hg'(z_0))\epsilon_f(h) \rightarrow 0,$$

kun $h \rightarrow 0$. Tämä todistaa tuloa koskevan väitteen.

c) Riittää todistaa väite funktiolle $1/g$, sillä f/g voidaan käsitellä tämän ja edellisen kohdan avulla. Jatkuvuuden nojalla $g(z_0 + h) \neq 0$, kunhan $|h|$ on kyllin pieni. Nyt voimme laskea

$$\frac{1}{g(z_0 + h)} - \frac{1}{g(z_0)} = \frac{g(z_0) - g(z_0 + h)}{g(z_0 + h)g(z_0)} = \frac{-g'(z_0)h - h\epsilon_g(h)}{g(z_0 + h)g(z_0)}.$$

Siten jos $h \rightarrow 0$,

$$\frac{1}{h} \left(\frac{1}{g(z_0 + h)} - \frac{1}{g(z_0)} \right) = \frac{-g'(z_0) - \epsilon_g(h)}{g(z_0 + h)g(z_0)} \rightarrow -\frac{g'(z_0)}{g(z_0)^2},$$

mikä on haluttu kaava funktiolle $1/g$. \square

3.6 Seuraus. Jokainen kompleksikertoiminen polynomi $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ on analyyttinen koko \mathbb{C} :ssä. Samoin rationaalifunktio $R = P/Q$, jossa P ja Q ovat em. tyyppiä olevia polynomeja, on analyyttinen \mathbb{C} :ssä lukuunottamatta Q :n nollakohtia.

Koko tasossa analyyttisiä funktioita kutsutaan usein *kokonaisiksi funktioiksi*.

3.7 Esimerkki. a) Funktio $f(z) = 1/z$ on analyyttinen punkteeratussa tasossa $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja $f'(z) = -1/z^2$. Ymmärtääksemme tämän kuvauksen toiminnan paremmin, panemme merkille, että f on bijektio $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$, joka on myös itsensä käänteiskuvaus. Käyttämällä napaesitystä $z = re^{i\varphi}$ nähdään lisäksi, että

$$f(re^{i\varphi}) = \frac{1}{r}e^{-i\varphi}.$$

Tämä voidaan tulkita niin, että f on yhdistelmä kahdesta peilauksesta: yhtäältä $re^{i\varphi} \mapsto (1/r)e^{i\varphi}$, joka on peilaus yksikköympyrän suhteen, ja toisaalta liittoluvun otto $z \mapsto \bar{z}$, joka puolestaan on peilaus reaaliakselin suhteen. Kumpikaan näistä ei ole analyyttisiä (jälkimmäisen osalta ks. esimerkki 3.2d) mutta niistä yhdistetty funktio f siis on!

b) Erittäin tärkeän rationaalifunktioiden luokan muodostavat *Möbius-kuvaukset* $(az + b)/(cz + d)$, jossa $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ja $ad - bc \neq 0$. Tällainen on analyyttinen kaikkialla lukuunottamatta pistettä $-d/c$ tapauksessa $c \neq 0$. Tutkimme näitä kuvauksia myöhemmin.

c) Tarkastellaan vielä funktiota $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$. Koska $(f(h) - f(0))/h = \bar{h} \rightarrow 0$, kun $h \rightarrow 0$, f :llä on origossa kompleksinen derivaatta $f'(0) = 0$. Kuitenkaan f :llä ei ole derivaattaa missään muussa pisteessä $z_0 \neq 0$; jos nimittäin olisi, myös funktio $\bar{z} = f(z)/z$ olisi kyseisessä pisteessä derivoituva, mikä ei ole totta (esim. 3.2d). Siispä määritelmän mukaan f ei ole analyyttinen missään, ei edes 0:ssa.

Huomaa, että f voidaan myös ilmaista kuvauksena $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$. Se on siis \mathbb{R}^2 :n polynomi, ja sillä selvästikin on kaikkien kertalukujen osittaisderivaatat.

Kompleksiselle derivaatalle pätee myös tuttu ketjusääntö eli yhdistetyn funktion derivointisääntö:

3.8 Lause. Olkoot $A, A' \subset \mathbb{C}$ ja $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ sekä $g: A' \rightarrow \mathbb{C}$ siten, että $f(A) \subset A'$. Oletetaan, että z_0 on A :n sisäpiste ja $f(z_0)$ on A' :n sisäpiste. Jos f on derivoituva z_0 :ssa ja g on derivoituva $f(z_0)$:ssa, niin $g \circ f$ on derivoituva z_0 :ssa ja

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) f'(z_0).$$

Todistus. Merkitään $w_0 = f(z_0)$. Otetaan taas käyttöön apulauseen 3.3 antamat kehitelmät:

$$\begin{aligned} f(z_0 + h) &= f(z_0) + f'(z_0)h + h\epsilon_f(h), \\ g(w_0 + k) &= g(w_0) + g'(w_0)k + k\epsilon_g(k). \end{aligned}$$

On syytä huomata, että jatkuvuuden nojalla $f(z_0 + h) \in A'$, kunhan $|h|$ on kyllin pieni.

Sovelletaan aluksi f :n kehitelmää ja sitten g :n kehitelmää valinnalla $k = k(h) = f'(z_0)h + h\epsilon_f(h)$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} g(f(z_0 + h)) &= g(f(z_0) + f'(z_0)h + h\epsilon_f(h)) \\ &= g(w_0) + g'(w_0)[f'(z_0)h + h\epsilon_f(h)] + k(h)\epsilon_g(k(h)) \\ &= g(w_0) + g'(w_0)f'(z_0)h \\ &\quad + h[g'(w_0)\epsilon_f(h) + f'(z_0)\epsilon_g(k(h)) + \epsilon_f(h)\epsilon_g(k(h))]. \end{aligned}$$

Kun $h \rightarrow 0$, niin selvästi $k(h) \rightarrow 0$ ja siten viimeinen hakasissa oleva lauseke $\rightarrow 0$. Näin ollen yhdistetyllä funktiolla $g \circ f$ on apulauseen 3.3 vaatima kehitelmä pisteessä z_0 ja $(g \circ f)'(z_0) = g'(w_0)f'(z_0)$ kuten halusimmekin. \square

Cauchyn ja Riemannin yhtälöt

Tarkastellaan funktiota $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, jossa $A \subset \mathbb{C}$. Tällöin reaali-osa $u = \operatorname{Re} f$ ja imaginaari-osa $v = \operatorname{Im} f$ ovat funktioita $A \rightarrow \mathbb{R}$ ja $f = u + iv$ eli

$$(3.9) \quad f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Tutkimme nyt, miten f :n kompleksinen derivoituvuus (tai analytyisyys) määritelmän 3.1 mielessä voidaan ymmärtää funktioiden u ja v sekä niiden tavallisten osittaisderivaattojen avulla. Samalla saamme selityksen sille, miksi vaikkapa esimerkkien 3.2d ja 3.7c funktiot eivät ole analyttisiä siitä huolimatta, että niiden reaali- ja imaginaariosat ovat hyvin sileitä.

Palautetaan mieleen vektorianalyysin kurssilta, että funktio $U: A \rightarrow \mathbb{R}$ on *differentioituva* pisteessä $(x, y) \in A$, mikäli pätee kehitelmä

$$U(x + h_1, y + h_2) - U(x, y) = c_1 h_1 + c_2 h_2 + |h|\eta(h),$$

jossa $h = (h_1, h_2)$ ja $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$ on kyllin pieni sekä $\eta(h) \rightarrow 0$, kun $h \rightarrow 0$.¹ Tällöin kertoimet c_1 ja c_2 ovat U :n osittaisderivaatat pisteessä (x, y) ; käytämme merkintöjä $U_x(x, y) = \partial_1 U(x, y) = c_1$ ja $U_y(x, y) = \partial_2 U(x, y) = c_2$.

Oletetaan nyt, että $z = x + iy$ on A :n sisäpiste ja yhtälön (3.9) funktio f on kompleksisesti derivoituva z :ssa sekä $f'(z) = a$. Tällöin apulauseen 3.3 nojalla on voimassa kehitelmä

$$f(z + h) - f(z) = ah + h\epsilon(h),$$

jossa $\epsilon(h) \rightarrow 0$, kun $h \rightarrow 0$. Kirjoitetaan $a = a_1 + ia_2$ ja $h = h_1 + ih_2$, jolloin $ah = a_1 h_1 - a_2 h_2 + i(a_2 h_1 + a_1 h_2)$. Ottamalla yo. kehitelmässä puolittain reaali-osa saamme

$$u(x + h_1, y + h_2) - u(x, y) = a_1 h_1 - a_2 h_2 + \operatorname{Re} h\epsilon(h)$$

¹Ks. esim. O. MARTIO: *Vektorianalyysi*, Limes ry (2. korj. p. 2008), sivut 27–28. Martion kirjassa differentioituvuutta kutsutaan myös derivoituvuudeksi, mutta tätä ei (ainakaan lähtökohtaisesti) pidä sekoittaa meidän käyttämäämme kompleksisen derivoituvuuden käsitteeseen!

ja vastaavasti ottamalla imaginaariosat saamme

$$v(x + h_1, y + h_2) - v(x, y) = a_2 h_1 + a_1 h_2 + \operatorname{Im} h\epsilon(h).$$

Esimerkiksi u :hun liittyvä ”jäännöstermi” voidaan kirjoittaa $\operatorname{Re} h\epsilon(h) = |h|\eta(h)$, jossa $\eta(h) = |h|^{-1} \operatorname{Re} h\epsilon(h)$ ja $|\eta(h)| \leq |\epsilon(h)| \rightarrow 0$, kun $h \rightarrow 0$. Samoin voidaan päätellä v :lle. Saadut kehitelmät ovat siis täsmälleen differentioituvuuden määritelmässä esiintyvää tyyppiä.

Olemme itse asiassa todistaneet toisen suunnan seuraavassa lauseessa:

3.10 Lause. *Funktiolla $f = u + iv$ on kompleksinen derivaatta pisteessä z jos ja vain jos sekä u että v ovat differentioituvia z :ssa ja niiden osittaisderivaatat toteuttavat siinä **Cauchyn ja Riemannin yhtälöt***

$$u_x(z) = v_y(z), \quad u_y(z) = -v_x(z).$$

Tällöin pätee

$$f'(z) = u_x(z) + iv_x(z) = v_y(z) - iv_y(z).$$

Analyttisen funktion reaali- ja imaginaariosa ovat siis väistämättä vahvasti sidoksissa toisiinsa. Imaginaariosan osittaisderivaatat määräytyvät täysin reaaliosan perusteella ja kääntäen.

Todistus. Jäljellä on enää ehtojen riittävyden osoittaminen. Koska funktiot u ja v ovat differentioituvia, niin

$$\begin{aligned} u(z + h) - u(z) &= u_x(z)h_1 + u_y(z)h_2 + |h|\eta_1(h), \\ v(z + h) - v(z) &= v_x(z)h_1 + v_y(z)h_2 + |h|\eta_2(h), \end{aligned}$$

kun merkitään $h = (h_1, h_2)$. Tässä $\eta_1(h) \rightarrow 0$ ja $\eta_2(h) \rightarrow 0$, kun $h \rightarrow 0$. Kerrotaan jälkimmäinen yhtälö i :llä ja lasketaan yhtälöt puolittain yhteen, jolloin saadaan

$$f(z + h) - f(z) = [u_x(z) + iv_x(z)]h_1 + [u_y(z) + iv_y(z)]h_2 + |h|\eta(h),$$

jossa $\eta(h) = \eta_1(h) + i\eta_2(h)$. Otetaan nyt huomioon Cauchyn ja Riemannin yhtälöt. Niiden ja kompleksilukujen tulon määritelmän avulla nähdään, että $[u_y(z) + iv_y(z)]h_2 = [u_x(z) + iv_x(z)]ih_2$. Koska $h = h_1 + ih_2$, on saatu kehitelmä

$$f(z + h) - f(z) = [u_x(z) + iv_x(z)]h + |h|\eta(h).$$

Jos määrittelemme vielä $\epsilon(h) = \frac{|h|}{h}\eta(h)$, niin jäännöstermi saa muodon $h\epsilon(h)$ ja $\epsilon(h) \rightarrow 0$, kun $h \rightarrow 0$. Näin ollen olemme todistaneet, että f :llä on kompleksinen derivaatta pisteessä z ja sen arvo on $u_x(z) + iv_x(z)$. \square

3.11 Huomautus. a) Lausetta 3.10 sovellettaessa on hyvä muistaa seuraava tieto vektorianalyysin kurssilta: Riittävä ehto funktion $U: A \rightarrow \mathbb{R}$ differentioituvuudelle pisteessä z on se, että U :llä on tässä pisteessä jatkuvat osittaisderivaatat. Tämä tarkoittaa sitä, että osittaisderivaatat U_x ja U_y ovat olemassa jossakin z :n ympäristössä ja lisäksi ne ovat jatkuvia z :ssa.

b) Myöhemmin tulemme näkemään, että jos f on analyyttinen (avoimessa) joukossa A , sen reaali- ja imaginaariosalla on A :ssa kaikkien kertalukujen osittaisderivaatat! Voitaisiin siis kirjoittaa $u, v \in C^\infty(A)$.

3.12 Esimerkki. a) Tiedämme, että funktio $f(z) = z^2$ on analyyttinen. Todetaan tämä myös Cauchyn ja Riemannin yhtälöiden avulla. Koska

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy,$$

on $f = u + iv$, jossa $u(x, y) = x^2 - y^2$ ja $v(x, y) = 2xy$. Siispä u ja v ovat differentioituvia (jopa kaikkialla jatkuvat osittaisderivaatat) ja $u_x(x, y) = 2x = v_y(x, y)$ sekä $u_y(x, y) = -2y = -v_x(x, y)$, joten Cauchyn ja Riemannin yhtälöt toteutuvat.

b) Tarkastellaan uudelleen esimerkin 3.2d funktiota $f(x+iy) = \overline{x+iy} = x-iy$. Sen reaali-osa on $u(x, y) = x$ ja imaginaariosa $v(x, y) = -y$. Näin ollen $u_x = 1 \neq -1 = v_y$, joten Cauchyn ja Riemannin yhtälöt eivät toteudu eikä f voi olla analyyttinen.

c) Tutkitaan, onko funktio

$$g(z) = g(x + iy) = (x^2 + 2xy) + i(y^2 + 2xy)$$

analyyttinen. Nyt siis $u(x, y) = x^2 + 2xy$ ja $v(x, y) = y^2 + 2xy$, joten esimerkiksi $u_y(x, y) = 2x$ ja $v_x(x, y) = 2y$. Näemme, että yhtälö $u_y(x, y) = -v_x(x, y)$ toteutuu vain suoralla $x = -y$. Erityisesti se ei toteudu missään avoimessa joukossa (eli minkään pisteen kokonaisessa ympäristössä), joten g ei voi olla analyyttinen missään pisteessä.

Cauchyn ja Riemannin yhtälöiden seurauksena saadaan mm. seuraava hyödyllinen tulos. Lukijan on tässä vaiheessa syytä kerrata yhtenäisyyden ja alueen käsitteet luvun 2 lopusta.

3.13 Lause. *Olkoon f on analyyttinen alueessa A . Oletetaan, että jokin seuraavista funktioista on vakio A :ssa: $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, $|f|$ tai $\arg f$. Tällöin f on vakio A :ssa.*

Lauseen todistamiseen tarvitsemme seuraavan aputuloksen, joka kuuluu useamman muuttujan funktioiden differentiaali- ja integraalilaskennan piiriin (vektorianalyysin kurssi) ja jonka todistaminen (tai kirjallisuudesta etsiminen) jää harjoitustehtäväksi.

3.14 Apulause. *Oletetaan, että $A \subset \mathbb{R}^2$ on alue ja $U: A \rightarrow \mathbb{R}$ on funktio, jolle $U_x = U_y = 0$ A :ssa. Tällöin U on vakio.*

Lauseen 3.13 todistus. Merkitään $f = u + iv$. Jos oletetaan, että $u = \operatorname{Re} f$ on vakio, niin selvästi $u_x = u_y = 0$. Mutta nyt Cauchyn ja Riemannin yhtälöistä seuraa, että myös $v_x = v_y = 0$, joten apulauseen mukaan v ja siten myös f on vakio. Jos oletetaan, että $v = \operatorname{Im} f$ on vakio, päättely on samanlainen. Modulin ja argumentin osalta lauseen todistus sujuu mukavammin myöhemmin logaritmfunktion avulla. \square

Harmoniset funktiot

Cauchyn ja Riemannin yhtälöihin liittyen sanomme lyhyesti ja lisätietona muutaman sanan harmonisista funktioista. Tason avoimessa joukossa A määritelty reaaliarvoinen funktio u on *harmoninen*, mikäli sillä on jatkuvat toisen kertaluvun osittaisderivaatat, ts. $u \in C^2(A)$, ja se toteuttaa A :ssa *Laplacen yhtälön*

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Tässä siis $u_{xx} = (u_x)_x$ on toinen osittaisderivaatta ensimmäisen muuttujan suhteen, ja muut toisen kertaluvun osittaisderivaatat merkitään vastaavasti.

Olkoon nyt $f = u + iv$ analyyttinen A :ssa. Oletetaan lisäksi, että u ja v kuuluvat funktioluokkaan $C^2(A)$; kuten huomautuksessa 3.11b totesimme, tämä on itse asiassa aina totta analyyttisen funktion reaali- ja imaginaariosalle. Cauchyn ja Riemannin yhtälöistä sekä vektorianalyysin kurssilla todistetusta osittaisderivoitijärjestyksen vaihtosäännöstä seuraa, että

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = (v_y)_x - (v_x)_y = 0,$$

joten u on harmoninen. Samoin nähdään, että v on harmoninen. *Analyyttisen funktion reaali- ja imaginaariosa ovat siis aina harmonisia funktioita!*

Kääntäen voidaan osoittaa, että jos u on konveksissa (tai yleisemmin ns. *yhdesti yhtenäisessä* eli ”reiättömässä”) alueessa A määritelty harmoninen funktio, niin on olemassa toinen harmoninen funktio v (ns. *liittofunktio*) A :ssa siten, että $u + iv$ on analyyttinen. Sivuumme näiden asioiden laajemman ja tarkemman käsittelyn – harmonisia funktioita on yleensä opiskeltu paremmin kurssilla Funktioteoria II.

3.15 Esimerkki. a) Jokainen ensimmäisen asteen polynomi $u(x, y) = ax + by + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) on harmoninen, sillä selvästi $\Delta u = 0$. Liittofunktiolle v tulee olla Cauchyn ja Riemannin yhtälöiden mukaan voimassa $v_x = -u_y = -b$ ja $v_y = u_x = a$. Eräs tällainen funktio on $v(x, y) = -bx + ay$. Mitä onkaan $u + iv$ muuttujan z avulla kirjoitettuna tällöin?

b) Tarkastellaan funktioita $u(x, y) = ax^2 + by^2$, jossa $a, b \in \mathbb{R}$, ja selvitetään, koska nämä ovat harmonisia. Derivoimalla saadaan $\Delta u = 2a + 2b$, joten u on harmoninen jos ja vain jos $a = -b$ ja tällöin $u(x, y) = a(x^2 - y^2) = \operatorname{Re} az^2$.

Käänteisfunktion analyyttisyys; juurifunktio

Tarkastellaan funktiota $z \mapsto z^2$, joka on analyyttinen koko \mathbb{C} :ssä. Sen kuvausominaisuuksia on mukava ajatella napaesityksen kautta, sillä jos $z = se^{i\theta}$, niin $z^2 = s^2 e^{2i\theta}$. Tutkitaan tämän funktion kääntämistä eli mahdollisuuksia määritellä neliöjuurifunktio kompleksiluvuilla. Kuten luvun 1 lopussa on nähty, jokaisella $w \neq 0$ on olemassa kaksi eri lukua z , joille $z^2 = w$: jos esimerkiksi kirjoitetaan $w = re^{i\varphi}$, jossa $r > 0$ ja $\varphi \in (-\pi, \pi]$ (jolloin r ja φ ovat yksikäsitteiset), niin luvuille $z = \pm\sqrt{r} e^{i\varphi/2}$ kummallekin pätee $z^2 = w$; +-merkkiä vastaava sijaitsee oikeassa puolitasossa (tai positiivisella imaginaariakselilla) ja --merkkiä vastaava origon suhteen symmetrisesti

vasemmassa puolitasossa (tai negatiivisella imaginaariakselilla). (Tässä \sqrt{r} viittaa tietysti ei-negatiivisen reaalityluvun r tuttuun ei-negatiiviseen neliöjuureen.)

Pohdittaessa juurifunktion määrittelyä – tai yleisemmin analyttisen ei-injektiivisen funktion kääntämistä – ajaudutaan siis luonnostaan tekemisiin monikäsitteisten (eli moniarvoisten) funktioiden kanssa. Tällaisten kunnollinen analyttinen käsittely vaatisi ns. *Riemannin pintojen* teoriaa, johon emme tällä kurssilla ryhdy. Yllä voimme tietysti aina valita esimerkiksi juuren $\sqrt{r} e^{i\varphi/2}$, jolloin päädyimme funktioon

$$(3.16) \quad g : re^{i\varphi} \mapsto \sqrt{r} e^{i\varphi/2} \quad (r \geq 0, -\pi < \varphi \leq \pi).$$

Tämä määrittelee koko \mathbb{C} :ssä yksikäsitteisen funktion, joka on oikeanpuoleinen käänteisfunktio funktiolle $z \mapsto z^2$, ts. $g(w)^2 = w$ kaikilla $w \in \mathbb{C}$. Ongelmana kuitenkin on, että g ei ole jatkuva (saati analyttinen) negatiivisen reaaliakselin $(-\infty, 0)$ pisteissä. (Selvitä miksi.) Analyttisen (oikeanpuoleisen) käänteisfunktion saavuttamiseksi onkin pakko rajoittaa sen määrittelyjoukkoa.

Voimme ottaa käyttöön seuraavan yleisen käsitteen:

3.17 Määritelmä. Olkoon f avoimessa joukossa A määritelty analyttinen funktio, ja olkoon D kuvajoukkoon $f(A)$ sisältyvä alue. Sanotaan, että $g: D \rightarrow A$ on f :n käänteiskuvauksen *haara alueessa* D , mikäli g on jatkuva D :ssä ja $f(g(w)) = w$ kaikilla $w \in D$.

Huomaa, että tällainen haara on aina injektio, koska jos $g(w) = g(w')$, niin $w = f(g(w)) = f(g(w')) = w'$. Yleensä ei ole olemassa koko kuvajoukossa $f(A)$ määriteltyä haaraa, ei edes silloin kun $f(A)$ on alue. Toisaalta jos käänteiskuvauksella on haara jossakin alueessa D , sillä on tavallisesti niitä siellä useita, ja lisäksi alue D voidaan valita monella tavalla.

Osoittautuu, että pelkkä haaran määritelmässä vaadittu jatkuvuus takaa sen analyttisyyden niissä pisteissä, joissa analyttinen kääntäminen ylipäättään voi olla mahdollista. Tämän kertoo käänteisfunktion derivointilause:

3.18 Lause. *Olkoon $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ analyttinen ja olkoon g sen käänteiskuvauksen haara alueessa D . Jos $w_0 \in D$ ja pisteessä $z_0 = g(w_0)$ pätee $f'(z_0) \neq 0$, niin g :llä on pisteessä w_0 derivaatta*

$$g'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Siten jos $f'(z) \neq 0$ kaikilla $z \in g(D)$, niin g on analyttinen D :ssä.

Todistus. Jos $w \in D$ ja $w \neq w_0$, niin

$$\frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \frac{g(w) - g(w_0)}{f(g(w)) - f(g(w_0))} = \left(\frac{f(g(w)) - f(g(w_0))}{g(w) - g(w_0)} \right)^{-1}.$$

Kun $w \rightarrow w_0$, niin jatkuvuuden nojalla $g(w) \rightarrow g(w_0)$, joten derivaatan määritelmästä nähdään, että yo. lauseke lähestyy lukua $f'(g(w_0))^{-1} = f'(z_0)^{-1}$. \square

Palataan neliöjuurifunktion määrittelyyn. Rajoitamme kaavassa (3.16) määritellyn funktion negatiivista reaaliakselia pitkin aukileikattuun tasoon $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, ts. tarkastelemme funktiota

$$(3.19) \quad g: D \rightarrow \mathbb{C}, \quad re^{i\varphi} \mapsto \sqrt{r} e^{i\varphi/2} \quad (r > 0, -\pi < \varphi < \pi).$$

Tässä D on selvästi alue ja g kuvaa sen bijektiivisesti oikealle puolitasolle $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$.

3.20 Lause. *Kaavan (3.19) funktio on neliöjuuren haara, joka on analyyttinen D :ssä, ja $g'(w) = 1/2g(w)$ kaikilla $w \in D$.*

Saatua neliöjuuren haaraa kutsutaan usein *neliöjuuren päähaaraksi*.

Todistus. Koska $\frac{d}{dz} z^2 = 2z \neq 0$ kaikilla oikean puolitason pisteillä z , väite seuraa käänteisfunktion derivointilauseesta, kun osoitamme, että g on jatkuva D :ssä.

Olkoot tätä varten w_0 ja w alueen D pisteitä sekä $z_0 = g(w_0)$ ja $z = g(w)$ vastaavat oikean puolitason pisteet. Tällöin pätee

$$|w - w_0| = |z^2 - z_0^2| = |z - z_0| |z + z_0| \geq |z - z_0| \operatorname{Re} z_0,$$

sillä $\operatorname{Re} z_0 \leq \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} z_0 = \operatorname{Re}(z + z_0) \leq |z + z_0|$. Jos siis $\epsilon > 0$, niin voimme päätellä, että

$$|g(w) - g(w_0)| \leq \frac{|w - w_0|}{\operatorname{Re} g(w_0)} < \epsilon,$$

kunhan vain $|w - w_0| < \epsilon \operatorname{Re} g(w_0)$. Siten g on jatkuva w_0 :ssa. □

Aivan vastaavalla tavalla saamme analyyttisen haaran n :nulle juurelle alueessa $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ kaavasta

$$re^{i\varphi} \mapsto r^{1/n} e^{i\varphi/n} \quad (r > 0, -\pi < \varphi < \pi).$$

Se on bijektio sektorille $\{z \in \mathbb{C} : -\pi/n < \arg z < \pi/n\}$.

4 Eksponentti- ja logaritmifunktio

Tässä luvussa määrittelemme eksponenttifunktion e^z kompleksitasossa ja tutkimme sen kääntämistä eli logaritmin määrittelyä. Näiden avulla voimme myös tarkastella yleistä potenssifunktiota z^a , jossa a on kompleksiluku.

Eksponenttifunktio

Analyysin peruskursseilla on määritelty eksponenttifunktio reaaliakselilla, ja tämän kurssin alussa olemme määritelleet sen myös imaginaariakselilla Eulerin kaavan avulla. Haluamme nyt laajentaa eksponenttifunktion koko kompleksitasoon. Toiveena olisi, että saatava funktio e^z olisi analyyttinen ja toteuttaisi perusominaisuuden

$$(4.1) \quad e^{z+w} = e^z e^w, \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

Jotta ominaisuus (4.1) toteutuisi ja aikaisemmat määritelmät reaali- ja imaginaariakselilla pysyisivät voimassa, meidän onkin pakko asettaa

$$(4.2) \quad e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Tarvittaessa voi myös kirjoittaa $e^z = \exp z$. Huomaa, että määritelmän mukaan $|e^z| = e^x$ ja $\arg e^z = y$. Tarkastamalla tapaukset $y = 0$ ja $x = 0$ näemme myös, että aikaisemmat määritelmät todella pysyvät voimassa. Lisäksi jos $z = x + iy$ ja $w = u + iv$, niin

$$e^{z+w} = e^{x+u} e^{i(y+v)} = e^x e^u e^{iy} e^{iv} = e^{x+iy} e^{u+iv} = e^z e^w,$$

joten määrittelemällämme funktiolla on haluttu ominaisuus (4.1).

Jäljelle jää vain analyyttisyyden osoittaminen:

4.3 Lause. *Kaavan (4.2) määrittelemä funktio on analyyttinen \mathbb{C} :ssä ja $\frac{d}{dz} e^z = e^z$.*

Todistus. Määritelmästä näemme, että funktion reaaliosa on $u(x, y) = e^x \cos y$ ja imaginaariosa $v(x, y) = e^x \sin y$. Näiden osittaisderivaatoille pätee

$$u_x(x, y) = e^x \cos y = v_y(x, y), \quad u_y(x, y) = -e^x \sin y = -v_x(x, y),$$

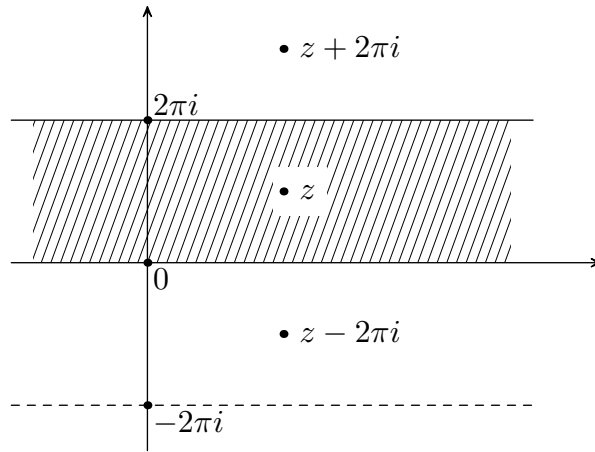
joten Cauchyn ja Riemannin yhtälöt toteutuvat. Lisäksi osittaisderivaatat ovat jatkuvia. Lauseen 3.10 perusteella e^z on siis analyyttinen ja sen derivaatta pisteessä $z = x + iy$ on $u_x(x, y) + iv_x(x, y) = e^x (\cos y + i \sin y) = e^z$. \square

Reaalimuuttujan eksponenttifunktio $x \mapsto e^x$ on tunnetusti bijektio reaaliakselilta positiiviselle reaaliakselille. Kompleksisen eksponenttifunktion tapauksessa törmäämme uuteen ilmiöön: e^z on jaksollinen ”imaginaariakselin suunnassa”. Tämä johtuu tietysti sinin ja kosinin jaksollisuudesta.

4.4 Lause. Eksponenttifunktiolla on jaksona $2\pi i$, ts. $e^{z+n \cdot 2\pi i} = e^z$, kun $z \in \mathbb{C}$ ja n on kokonaisluku.

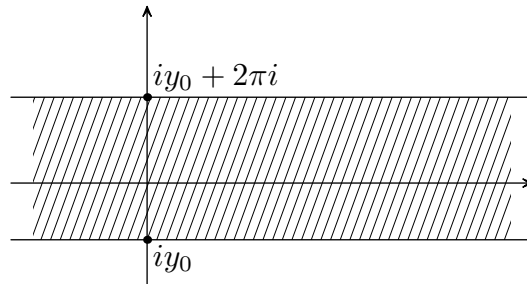
Todistus. $e^{z+n \cdot 2\pi i} = e^z e^{n \cdot 2\pi i}$, jossa $e^{n \cdot 2\pi i} = \cos 2\pi n + i \sin 2\pi n = 1$. □

Olipa $z \in \mathbb{C}$ mikä tahansa, yksi luvuista $z + n \cdot 2\pi i$ sijaitsee aina vaakasuorassa vyössä $S_0 = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Im } z < 2\pi\}$ (kuva alla). Eksponenttifunktio saa siis kaikki arvonsa jo tässä joukossa.



Sama pätee mille tahansa ns. *jaksovyöstä*

$$S_{y_0} = \{z \in \mathbb{C} : y_0 \leq \text{Im } z < y_0 + 2\pi\}, \quad y_0 \in \mathbb{R}.$$



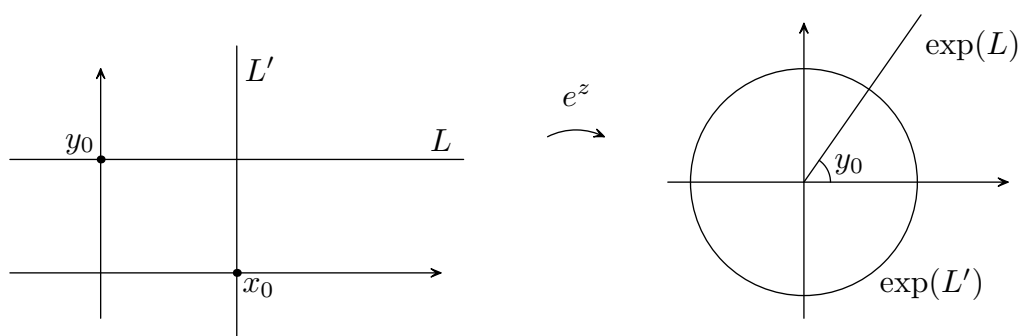
4.5 Lause. Funktio $z \mapsto e^z$ on bijektio jaksovyöltä S_{y_0} punkteeratulle tasolle $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Todistus. Pannaan aluksi merkille, että kaikilla $z \in \mathbb{C}$ pätee $|e^z| = e^{\text{Re } z} > 0$ ja siten $e^z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Olkoon $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mielivaltainen ja tarkastellaan yhtälöä $e^z = w$. Voimme kirjoittaa $w = re^{i\varphi}$, jossa $r > 0$, ja $z = x + iy$. Tällöin yhtälö saa muodon $e^x e^{iy} = re^{i\varphi}$.

Tämä toteutuu jos ja vain jos $e^x = r$ (kummankin puolen modulien oltava samat!) ja $e^{iy} = e^{i\varphi}$. Ensimmäisen yhtälön ainoa ratkaisu on $x = \log r$ ja toinen toteutuu jos ja vain jos $y = \varphi + n \cdot 2\pi$ jollain kokonaisluvulla n .¹ Näin saaduista y :n arvoista tasan yksi toteuttaa ehdon $y_0 \leq y < y_0 + 2\pi$. Siten yhtälöllä $e^z = w$ on joukossa S_{y_0} tasan yksi ratkaisu $z = x + iy$. \square

Pannaan lopuksi merkille, miten eksponenttifunktio kuvaa kompleksitason koordinaattiakselien suuntaiset suorat. Vaakasuora $\text{Im } z = y_0$ kuvautuu origosta lähtevälle puolisuoralle $\arg w = y_0$, jossa origo ei ole mukana. Pystysuora $\text{Re } z = x_0$ puolestaan kuvautuu origokeskiselle ympyränkehälle $|w| = e^{x_0}$. (Selvitä itsellesi, miksi näin on.)



Logaritmifunktio

Jos r on positiivinen reaaliluku, niin sen logaritmi $x = \log r$ on se yksikäsitteinen reaaliluku, jolle $e^x = r$. Kompleksitasossa logaritmin käsite on mutkikkaampi, sillä lauseen 4.4 mukaan eksponenttifunktio on nyt jaksollinen ja saa kunkin arvonsa äärettömän monessa eri pisteessä. Kun $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, yhtälöllä $e^z = w$ on siis äärettömän monta ratkaisua; ne käyvät ilmi vaikkapa lauseen 4.5 todistuksesta.

4.6 Määritelmä. Luvun $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *logaritmilla* $\log w$ on äärettömän monta arvoa, ja ne ovat

$$\log w = \log|w| + i \arg w + n \cdot 2\pi i, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

jossa $\arg w$ on jokin w :n argumentin arvoista.

Kuten jo lauseessa 4.5 totesimme, annetussa jaksovyössä S_{y_0} sijaitsee täsmälleen yksi näistä arvoista. Näin saadaan yksikäsitteinen funktio punkteeratulta tasolta $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ko. jaksovyölle. Yhtäpitävästi tämän voi ajatella niin, että kiinnitetään yo. määritelmässä n ja annetaan $\arg w$:n vaihdella sopivalla 2π :n pituisella välillä (esim. $n = 0$ ja $y_0 \leq \arg w < y_0 + 2\pi$).

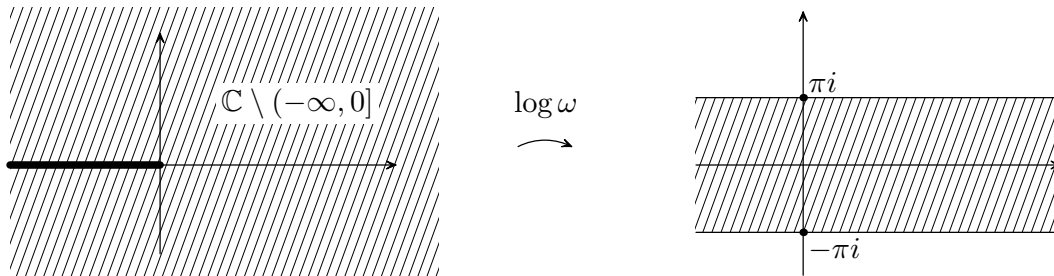
Luonteva jaksovyön valinta voisi olla $S_{-\pi}$ (vrt. juurifunktion määrittely edellisen luvun lopussa). Funktio $\log: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow S_{-\pi}$ ei kuitenkaan ole jatkuva negatiivisella reaaliakselilla, koska vastaava argumentti, $-\pi \leq \arg w < \pi$, ei ole siellä jatkuva (mieti

¹Näissä muistiinpanoissa \log tarkoittaa luonnollista eli e -kantaista logaritmia.

miksi). Jatkuvan haaran (ks. määr. 3.17) saamiseksi tästä on rajoituttava negatiivista reaaliakselia pitkin aukileikattuun tasoon $A = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, jossa

$$(4.7) \quad \log w = \log|w| + i \arg w, \quad -\pi < \arg w < \pi.$$

Kutsumme tätä *logaritmin päähaaraksi*. Muut logaritmin haarat A :ssa saadaan lisäämällä tähän jokin $2\pi i$:n monikerta.



4.8 Lause. *Logaritmin päähaara (4.7) alueessa $A = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ on analyyttinen funktio ja*

$$\frac{d}{dw} \log w = \frac{1}{w}.$$

Todistus. Koska $\frac{d}{dz} e^z = e^z \neq 0$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$, voimme päätellä käänteisfunktion derivointilauseesta 3.18, että väite on todistettu, kunhan osoitamme, että funktio (4.7) on jatkuva A :ssa. Tunnetusti $w \mapsto |w|$ ja reaalinen logaritmi ovat jatkuvia, joten reaaliosa $\log|w|$ on jatkuva. Imaginaariosan eli $\arg w$:n jatkuvuus A :ssa on puolestaan olennaisesti osoitettu esimerkissä 2.14 (siellä esitetty päättely φ :n jatkuvuuden osoittamiseksi toimii jokaisessa aukileikatun tason A pisteessä). \square

Sama tulos ja derivointikaava pätee mille tahansa logaritmin haaralle. Monissa kirjoissa päähaaraksi kutsutaan positiivista reaaliakselia pitkin aukileikatussa tasossa $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ määriteltyä haaraa, jonka imaginaariosa vaihtelee välillä $(0, 2\pi)$.

Logaritmillä voi pienin varauksin laskea kuten reaaliosassa tapauksessa.

4.9 Lause. *Jos \log on jokin logaritmin haara ja $z_1, z_2, z_1 z_2$ ja z_1/z_2 kuuluvat sen määrittelyjoukkoon, niin seuraavat yhtälöt pätevät luvun $2\pi i$ monikertaa vaille:*

$$\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2, \quad \log \frac{z_1}{z_2} = \log z_1 - \log z_2.$$

Todistus. Väitteet seuraavat siitä, että $e^{w_1+w_2} = e^{w_1} e^{w_2}$ ja $e^{w_1-w_2} = e^{w_1}/e^{w_2}$, ja toisaalta, että $e^{w_1} = e^{w_2}$ jos ja vain jos w_1 ja w_2 ovat samat $2\pi i$:n monikertaa vaille. \square

Täydennämme vielä aikaisemmin keskenjääneen todistuksen.

Lauseen 3.13 todistus (loppuosa). Oletetaan, että $\arg f$ on vakio θ ja f ei saa arvoa nolla. Tämä merkitsee, että f :n arvot sijaitsevat origosta lähtevällä puolisuoralla, jonka

vaihekulma on θ . Tämä sisältyy esimerkiksi origon suhteen vastakkaista puolisuoraa pitkin aukileikattuun tasoon, jossa logaritmillä on haara \log . Näin yhdistetty funktio $\log f$ on hyvinmääritelty ja analyyttinen, ja oletuksen mukaan sen imaginaariosa on vakio. Siten lauseen aikaisemmin todistetusta osasta seuraa, että $\log f$ on vakio ja siis f on vakio.

Oletetaan sitten, että $|f|$ on vakio c . Jos $c = 0$, niin $f \equiv 0$. Muuten $c > 0$ ja f :n arvojoukko sisältyy siis ympyrään $|w| = c$. Tällöin voimme päätellä esimerkiksi seuraavasti: Jatkuvuuden takia jokaisella pisteellä $z \in A$ on ympäristö $D_z = D(z, r_z)$, jonka kuva $f(D_z)$ sijaitsee jotakin origosta lähtevää puolisuoraa pitkin aukileikatussa tasossa. Kuten edellä, tästä seuraa, että $\log f$ on analyyttinen D_z :ssa. Oletuksen johdosta sen reaali-osa $\log|f|$ on vakio, joten päättelemme, että f on vakio D_z :ssa. Siis jokaisella A :n pisteellä on ympäristö, jossa f on vakio. A :n yhtenäisyydestä seuraa tällöin, että f on vakio koko A :ssa (vapaa harjoitustehtävä). \square

Kompleksinen potenssifunktio

Logaritmfunktion avulla voimme määritellä myös mielivaltaisen potenssifunktion: Jos $z \neq 0$ ja $a \in \mathbb{C}$, niin asetamme

$$z^a = \exp(a \log z).$$

Koska logaritmi on moniarvoinen funktio, moniarvoisuus pätee myös yleiselle kompleksiselle potenssille: Jos $\arg z$ on kiinnitetty johonkin arvoonsa, niin $\log z = \log|z| + i \arg z + 2n\pi i$ ja siten

$$z^a = \exp\{a(\log|z| + i \arg z + n \cdot 2\pi i)\} = |z|^a \exp\{a(i \arg z + n \cdot 2\pi i)\},$$

jossa n saa kaikki kokonaislukuarvot. Jos yleisestä potenssista halutaan yksiarvoinen funktio, meidän tulee valita sille jokin haara – käytännössä valitsemalla logaritmillemme jokin haara.

Erikoistapauksena on kuitenkin syytä huomata, että jos a on kokonaisluku, niin $\exp\{a(i \arg z + n \cdot 2\pi i)\} = \exp(ai \arg z)$ jokaisella n , joten z^a :lla on vain yksi arvo! Se yhtyy aikaisempaan tuttuun kokonaislukupotenssin määritelmään. Toisena erikoistapauksena $a = 1/k$, jossa $k = 2, 3, \dots$, saadaan edellisen luvun lopussa käsitelty k :s juuri. Logaritmin päähaaran valinta johtaa tällöin juuren päähaaraan.

Tarkastellaan vielä hieman eksoottisempaa esimerkkiä:

4.10 Esimerkki. Lasketaan luvun i^i kaikki arvot. Nyt $\arg i = \pi/2$, joten $\log i = i\pi/2 + n \cdot 2\pi i$. Saadaan

$$i^i = \exp\{i(i\pi/2 + n \cdot 2\pi i)\} = \exp(-\pi/2 - n \cdot 2\pi), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Luvulla i^i on siis äärettömän monta arvoa, jotka kaikki ovat positiivisia reaalilukuja.

5 Konformisuus ja laajennettu taso

Tarkastelemme tässä luvussa analyyttisten funktioiden keskeistä geometrista ominaisuutta, *konformisuutta*. Tässä on kysymys siitä, että niissä pisteissä, joissa derivaatta ei häviä, analyyttinen funktio on ”kulmat säilyttävä” kuvaus.

Esittelemme myös tavan laajentaa kompleksitasoa lisäämällä siihen äärettömyyspiste. Laajennettu taso voidaan kuvata ns. *Riemannin pallona*. Yleistämme hieman analyyttisyyden ja konformisuuden käsitteitä, jotta voimme puhua niistä myös laajennetussa tasossa.

Konformisuuden käsittely jatkuu seuraavassa luvussa, jossa perehdymme seuraavaan ongelmaan: miten kuvata (laajennetun) kompleksitason alue toiselle alueelle konformisesti.

Polun tangentti

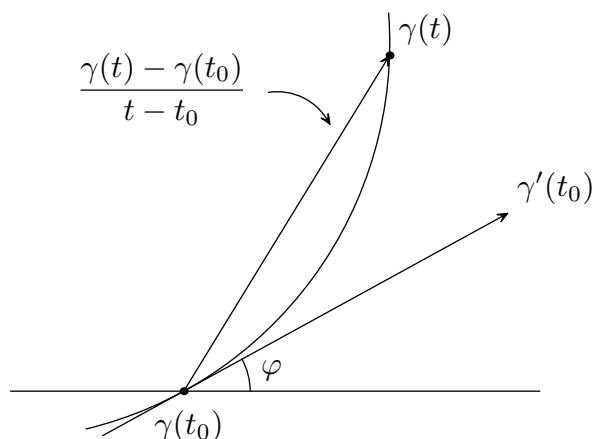
Palautetaan mieleen (ks. luvun 2 loppu), että jatkuvaa kuvausta $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ($a < b$) kutsutaan *poluksi*. Sen *alkupiste* on $\gamma(a)$ ja *loppupiste* $\gamma(b)$; näitä molempia voidaan kutsua *päätepisteiksi*. Jos kuvajoukko $\gamma([a, b])$ sisältyy joukkoon A , sanotaan, että γ on A :n polku. On huomattava, että polku on eri asia kuin joukko $\gamma([a, b])$, jota voi tarpeen vaatiessa kutsua *käyräksi*. Toisaalta *parametrivälin* $[a, b]$ valinnalla ei sinänsä ole useimmiten merkitystä, ja esimerkiksi affinia bijektiota $\eta: [0, 1] \rightarrow [a, b]$, $\eta(t) = a + t(b-a)$, käyttämällä voimme aina korvata polun γ polulla $\gamma \circ \eta$, jolloin parametriväliksi tulee yksikköväli $[0, 1]$. Tarvittaessa hajotamme γ :n reaali- ja imaginaariosaansa kirjoittamalla

$$\gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t)) = \alpha(t) + i\beta(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Oletetaan, että t_0 on sellainen piste, jossa polku γ on derivoituva (eli yllä α ja β ovat derivoituvia) ja $\gamma'(t_0) = \alpha'(t_0) + i\beta'(t_0) \neq 0$. Toisin sanoen on olemassa raja-arvo

$$\gamma'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Voidaan sanoa, että piste t_0 on polun γ *säännöllinen piste*. Kuten alla oleva geometrisen tarkastelu osoittaa, tällaisessa pisteessä polulla γ on hyvinmääritelty ”suunta” tai *tangentti*, jota kuvaa *tangenttivektori* $\gamma'(t_0)$. Vastaavalla *tangenttisuoralla* on parametriesitys $s \mapsto \gamma(t_0) + s\gamma'(t_0)$, jossa $s \in \mathbb{R}$. Lisäksi kulma $\varphi = \arg \gamma'(t_0)$ on tangentin (tai yhtä hyvin itse polun) *suuntakulma*.



Geometrisesti tämä menettää merkityksensä, jos $\gamma'(t_0) = 0$. (Mikä olisi esimerkiksi vakiopolulle $t \mapsto z_0$ piirretty tangentti?)

5.1 Esimerkki. Määritellään

$$\gamma(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 1 + (t-1)i, & 1 \leq t \leq 2, \\ i + 3 - t, & 2 \leq t \leq 3, \\ (4-t)i, & 3 \leq t \leq 4. \end{cases}$$

Tämä on *umpinainen* polku, sillä $\gamma(0) = \gamma(4) = 0$. Itse asiassa γ :n kuvajoukko on murtoviiva, joka koostuu neljän sivusta (piirrä kuva). Kaikki muut pisteet paitsi 1, 2 ja 3 ovat säännöllisiä pisteitä. Pisteitä 0 ja 4 voitaneen pitää säännöllisinä, vaikkakin niissä derivaatat ja tangentit ovat vain toispuoleisia.

Konformisuus

Oletetaan nyt, että $A \subset \mathbb{C}$ ja funktio $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ on (kompleksisesti) derivoituva pisteessä $z_0 \in A$ määritelmän 3.1 mielessä. Olkoon lisäksi γ joukon A polku, jolle $\gamma(t_0) = z_0$ ja $\gamma'(t_0) \neq 0$. Tutkimme ”kuvapolkua” $f \circ \gamma$ pisteessä t_0 .

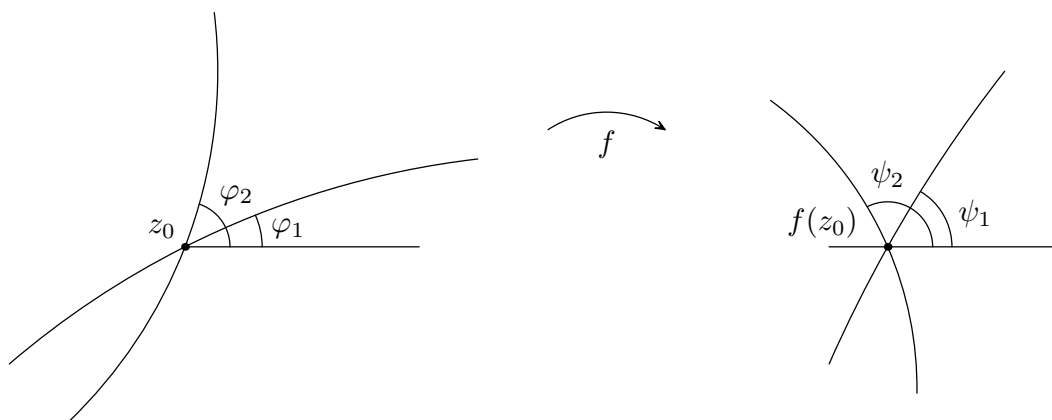
Koska f on derivoituva pisteessä $\gamma(t_0) = z_0$ ja γ on derivoituva t_0 :ssa, ketjusäännöstä seuraa, että $f \circ \gamma$ on derivoituva t_0 :ssa ja $(f \circ \gamma)'(t_0) = f'(z_0)\gamma'(t_0)$. (Tämän todistus on täysin samanlainen kuin lauseen 3.8.) Jos siis $f'(z_0) \neq 0$, niin polulla $f \circ \gamma$ on hyvinmääritelty tangenttivektori $f'(z_0)\gamma'(t_0)$. Tämän suuntakulma on (vrt. lause 1.17)

$$(5.2) \quad \psi = \arg f'(z_0) + \varphi, \quad \text{jossa } \varphi = \arg \gamma'(t_0).$$

Funktiolla f kuvaaminen siis kiertää polkua γ ja sen tangenttia pisteessä z_0 derivaatan $f'(z_0)$ vaihekulman verran!

Oletetaan sitten, että γ_1 ja γ_2 ovat molemmat edellä tarkasteltua tyyppiä olevia polkuja, jotka kulkevat pisteen z_0 kautta ja joilla on siinä suuntakulmat φ_1 ja φ_2 . Tämä merkitsee, että *polkujen välinen kulma* on tässä pisteessä $\varphi_2 - \varphi_1$. Jos $f'(z_0) \neq 0$

ja ψ_1 ja ψ_2 ovat vastaavien kuvapolkujen $f \circ \gamma_1$ ja $f \circ \gamma_2$ suuntakulmat, niin kaavasta (5.2) voimme päätellä heti, että $\psi_2 - \psi_1 = \varphi_2 - \varphi_1$ (ks. kuva alla).



Kirjaamme tämän tuloksen ylös seuraavasti:

5.3 Lause. Jos funktio f on (kompleksisesti) derivoituva pisteessä z_0 ja $f'(z_0) \neq 0$, niin f on **konforminen** tässä pisteessä: se säilyttää z_0 :n kautta kulkevien polkujen väliset kulmat. Erityisesti analyyttinen funktio f on konforminen kaikissa niissä pisteissä z , joissa $f'(z) \neq 0$.

Ehdon $f'(z) \neq 0$ voisi oikeastaan ottaa konformisuuden määritelmäksi, sillä kulmien säilymisestä itse asiassa seuraa kääntäen funktion derivoituvuus (ks. lisätietokappale alla). Myöhemmin osoitamme, että ei-vakion analyyttisen funktion derivaatta voi hävitä vain diskreetissä pistejoukossa, joten tällainen funktio on joka tapauksessa lähes kaikkialla konforminen.

Ajan salliessa palaamme vielä myöhemmin tutkimaan tarkemmin analyyttisen funktion lokaalia käyttäytymistä, myös niissä pisteissä joissa sen derivaatta häviää.

5.4 Esimerkki. Funktiolle $f(z) = z^2$ on $f'(z) = 2z$. Se on konforminen pisteissä $z \neq 0$. Origossa f ei ole konforminen: reaaliakseli ja imaginaariakseli leikkaavat toisensa kohtisuorasti mutta reaaliakselin kuva on positiivinen reaaliakseli ja imaginaariakselin kuva on negatiivinen reaaliakseli, jotka eivät leikkaa kohtisuorasti (vrt. harjoitustehtävä).

5.5 Huomautus. Tarkastelemassamme polun tangenttivektorin käsitteessä on itse asiassa kysymys *suunnatusta tangentista*; havainnollisesti ottaen se kertoo polun suunnan tarkasteltavassa pisteessä, kun polkua kuljetaan alkupisteestä kohti loppupistettä eli parametrin t kasvun suuntaan. Samoin polkujen välinen kulma on *suunnattu kulma* ensimmäisen polun tangenttivektorista toisen polun tangenttivektoriin positiiviseen kiertosuuntaan eli vastapäivään mitattuna. Lause 5.3 puolestaan kertoo paitsi sen, että polkujen välisen kulman absoluuttinen arvo säilyy, myös sen, että kulman etumerkki eli suunta säilyy. Konformisuus siis sisältää myös vaatimuksen *suunnistuksen säilymisestä!*

Lisätietoa konformisuudesta

Konformisuuden käsitettä voi lähestyä myös yleisemmin \mathbb{R}^2 :n differentioituvien kuvausten näkökulmasta. Olkoon $f = (u, v)$ kuvaus $A \rightarrow \mathbb{R}^2$, jossa $A \subset \mathbb{R}^2$, ja oletetaan, että u ja v ovat differentioituvia pisteessä $z_0 \in A$ vektorianalyysin kurssin mielessä (vrt. myös s. 23). Koordinaattifunktioiden osittaisderivaatat muodostavat f :n *Jacobin matriisin*

$$J_f(z_0) = \begin{bmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ v_x(z_0) & v_y(z_0) \end{bmatrix}.$$

Jos γ on A :n polku, jolle t_0 on säännöllinen piste ja $\gamma(t_0) = z_0$, niin ketjusäännön nojalla $(f \circ \gamma)'(t_0) = J_f(z_0)\gamma'(t_0)$, kun $\gamma'(t_0)$ ja $(f \circ \gamma)'(t_0)$ tulkitaan \mathbb{R}^2 :n vektoreiksi ja matriisien yhteydessä normaaliin tapaan 2×1 -matriiseiksi.

Tarkastellaan tilannetta, jossa $\gamma'(t_0) = e^{i\varphi}$ jollakin $\varphi \in \mathbb{R}$; polku γ voisi olla esimerkiksi z_0 :n kautta kulkeva suora $\gamma(t) = z_0 + te^{i\varphi}$ ja $t_0 = 0$. Nyt siis $\gamma'(t_0) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, joten

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)'(t_0) &= \begin{bmatrix} u_x \cos \varphi + u_y \sin \varphi \\ v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi \end{bmatrix} \\ &= (u_x + iv_x) \cos \varphi + (u_y + iv_y) \sin \varphi \\ &= \frac{1}{2}(u_x + iv_x)(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) + \frac{1}{2}(v_y - iu_y)(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}). \end{aligned}$$

(Olemme lyhyden vuoksi jättäneet merkitsemättä muuttujanarvon z_0 näkyviin.) Jos vaaditaan, että f on *konforminen* pisteessä z_0 , tulee kulman $\arg(f \circ \gamma)'(t_0) - \arg \gamma'(t_0) = \arg[(f \circ \gamma)'(t_0)e^{-i\varphi}]$ olla riippumaton kulmasta $\varphi = \arg \gamma'(t_0)$ kuten yhtälössä (5.2). Voimme laskea

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)'(t_0)e^{-i\varphi} &= \frac{1}{2}(u_x + iv_x)(1 + e^{-2i\varphi}) + \frac{1}{2}(v_y - iu_y)(1 - e^{-2i\varphi}) \\ &= \frac{1}{2}[u_x + v_y + i(v_x - u_y)] + \frac{1}{2}[u_x - v_y + i(v_x + u_y)]e^{-2i\varphi}. \end{aligned}$$

Kun tässä φ saa kaikki reaaliarvot, kyseiset pisteet piirtävät ympyrän, jonka keskipiste on $\frac{1}{2}[u_x + v_y + i(v_x - u_y)]$ ja säde $\frac{1}{2}|u_x - v_y + i(v_x + u_y)|$. Jotta näiden pisteiden vaihekulma olisi sama, ainoa mahdollisuus on, että ko. ympyrän säde on nolla eli yhtäpitävästi Cauchyn ja Riemannin yhtälöt $u_x = v_y$ ja $u_y = -v_x$ toteutuvat pisteessä z_0 ! Lauseen 3.10 nojalla kuvaus f on siis väistämättä kompleksisesti derivoituva pisteessä z_0 . Jotta $(f \circ \gamma)'(t_0) \neq 0$, on lisäksi oltava $f'(z_0) = u_x + iv_x = v_y - iv_x \neq 0$.

Lauseen 5.3 huomioonottaen voimme siis todeta:

Tason pisteessä z_0 differentioituva kuvaus f on konforminen jos ja vain jos se on kompleksisesti derivoituva pisteessä z_0 ja $f'(z_0) \neq 0$.

On mielenkiintoista huomata, että tässä tapauksessa myös Jacobin matriisi on erityistä muotoa: Koska $f' = u_x + iv_x$, voimme kirjoittaa napakoordinaateissa $u_x(z_0) = |f'(z_0)| \cos \theta$, $v_x(z_0) = |f'(z_0)| \sin \theta$ ja siten

$$J_f(z_0) = \begin{bmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ v_x(z_0) & v_y(z_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x(z_0) & -v_x(z_0) \\ v_x(z_0) & u_x(z_0) \end{bmatrix} = |f'(z_0)| \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

jossa $|f'(z_0)| = \sqrt{\det J_f(z_0)} > 0$ ja $\theta = \arg f'(z_0)$. Viimeinen matriisi vastaa lineaarikuvauksena tason kiertoa kulman θ verran. Näemme siis, että pisteessä z_0 konformista kuvausta voi lokaalisti approksimoida (lineaarisella) kuvauksella, joka muodostuu skaalauksesta (venytys tai kutistus) positiivisella kertoimella $|f'(z_0)|$ ja kierrosta kulman $\theta = \arg f'(z_0)$ verran!

Yllä skaalaustekijä $|f'(z_0)|$ on konformikuvauksen f lokaali suurennussuhde pisteessä z_0 ja se ilmenee tietysti jo derivaatan määritelmästä 3.1:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(z_0 + h) - f(z_0)|}{|h|} = |f'(z_0)|.$$

Huomionarvoista tässä on, että suurennussuhde on suunnasta riippumaton. Yo. raja-arvo voidaan laskea esimerkiksi pitkin puolisuoraa $h = te^{i\varphi}$, jossa parametri $t > 0$ on reaalinen ja φ on mielivaltainen kiinteä kulma. Jos $t \rightarrow 0+$, niin saatava raja-arvo ("suurennussuhde suuntaan φ ") on kulman φ valinnasta riippumatta aina sama positiiviluku $|f'(z_0)|$. Kääntäen on mahdollista osoittaa (samantapaisella tarkastelulla kuin edellä), että differentioituvalla kuvauksella on tällainen ominaisuus jos ja vain jos joko f on konforminen pisteessä z_0 tai \bar{f} on konforminen pisteessä z_0 . Jälkimmäisessä tapauksessa f on suunnistuksen kääntävä.

5.6 Esimerkki. Kuvaus $g(z) = \bar{z}$ on peilaus reaaliakselin suhteen. Se ei ole kompleksisesti derivoituva eikä siten konforminen missään pisteessä (ks. esim. 3.2d). Tämä selittyy sillä, että peilaus kääntää suunnistuksen. Kuvauksella g on kuitenkin suurennussuhde $= 1$ jokaisessa pisteessä, sillä $|g(z+h) - g(z)|/|h| = 1$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$ ja $h \neq 0$. Lisäksi $\bar{g}: z \mapsto \overline{g(z)} = z$ on triviaalisti analyttinen ja konforminen kaikkialla.

Riemannin pallo

Useissa funktioteorian tarkasteluissa on hyödyllistä laajentaa kompleksitasoa lisäämällä siihen äärettömyyspiste. Tämä merkitsee myös tason kompaktifointia.

Olkoon ∞ symboli, joka merkitsee *äärettömyyspistettä*, ja määritellään *laajennettu kompleksitaso*

$$\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Määrittelemme topologian laajennettuun tasoon sopimalla, että joukot

$$D(\infty, r) = \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \quad (r > 0)$$

ovat pisteen ∞ ympäristöjä. Topologian kielellä nämä muodostavat ympäristökannan pisteelle ∞ aivan kuten kiekot $D(z, r)$ ($r > 0$) muodostavat ympäristökannan äärelliselle pisteelle $z \in \mathbb{C}$. Avoimet joukot ym. käsitteet voidaan nyt määritellä tavalliseen tapaan ympäristöjen avulla.

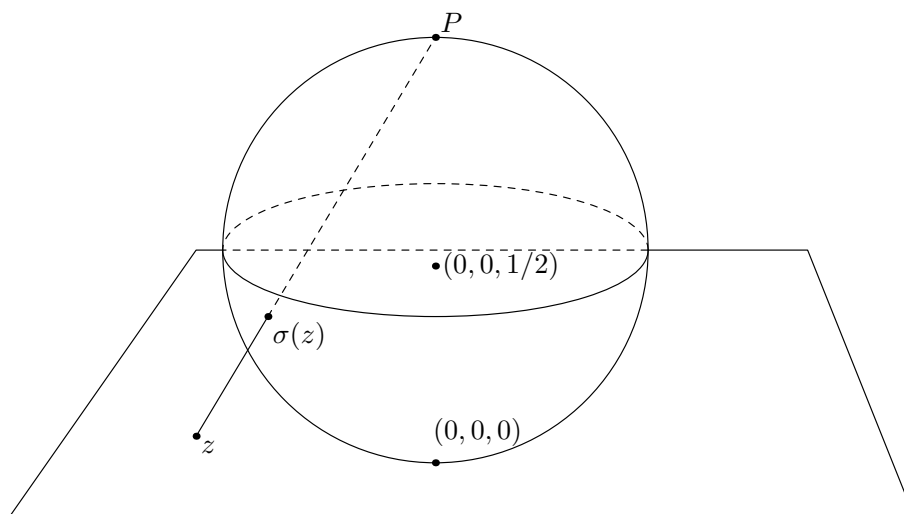
Laajennettu kompleksitaso $\bar{\mathbb{C}}$ voidaan luonnollisella tavalla tulkita kaksiulotteisena pallona (pallon pintana) kolmiulotteisessa avaruudessa. Ajatellaan $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ upotetuksi euklidiseen avaruuteen \mathbb{R}^3 tasoksi $\{(x_1, x_2, x_3) : x_3 = 0\}$ samastamalla piste $z = x + iy$

pisteeksi $(x, y, 0)$. *Riemannin pallo* \mathbb{S} on pallo, joka on tämän tason yläpuolella ja sivuaa tasoa origossa ja jonka halkaisija on 1. Pallon keskipiste on täten $(0, 0, \frac{1}{2})$ ja

$$(5.7) \quad \mathbb{S} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\}$$

Pallon *pohjoisnapa* on $P = (0, 0, 1)$.

Kun $z = x + iy = (x, y, 0)$ on kompleksitason piste, pohjoisnavan P ja pisteen z välinen yhdysjana $[P, z]$ leikkaa pallon \mathbb{S} yhdessä pisteessä, jolle annamme merkinnän $\sigma(z)$. Näin saatu kuvaus σ on bijektio $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S} \setminus \{P\}$ kuten alla oleva kuva kertoo.



Tälle kuvaukselle voi laskea eksplisiittisen lausekkeen

$$(5.8) \quad \sigma(z) = \frac{1}{1 + |z|^2} (x, y, |z|^2), \quad z = x + iy \in \mathbb{C},$$

ja sen käänteiskuvaus on

$$(5.9) \quad \sigma^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{1 - x_3} (x_1 + ix_2), \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S} \setminus \{P\}.$$

Näiden lausekkeiden johtaminen jää harjoitustehtäväksi. (Lausekkeen (5.9) saa esimerkiksi tutkimalla kahta yhdenmuotoista suorakulmaista kolmioita: yhden kärkipisteet ovat P , origo ja z , toisen kärkipisteet ovat P , $(0, 0, x_3)$ ja $\sigma(z) = (x_1, x_2, x_3)$.)

Näin saatu vastaavuus pallon ja tason välillä on nimeltään *stereografinen projektio*, ja sillä on käyttöä esimerkiksi kartografiassa. Kaavoista (5.8) ja (5.9) havaitsemme, että σ ja σ^{-1} ovat kumpikin jatkuvia, kun Riemannin pallolla käytetään tavallista \mathbb{R}^3 :n topologiaa. Jatkamme tämän vastaavuuden laajennettuun tasoon $\overline{\mathbb{C}}$ asettamalla $\sigma(\infty) = P$. Tällöin ympäristö $D(\infty, r)$ vastaa pohjoisnavan kalottiympäristöä \mathbb{S} :ssä, joten myös laajennettu kuvaus $\sigma: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{S}$ ja sen käänteiskuvaus ovat jatkuvia bijektioita. Kyseessä on siis *homeomorfinen* laajennettu kompleksitason ja Riemannin pallon välillä.

Koska \mathbb{S} on osajoukko metrisessä avaruudessa \mathbb{R}^3 , voimme itse asiassa induoida stereografisen projektion avulla laajennettuun tasoon metriikan d . Se saadaan

kaavoista

$$d(z, w) = \|\sigma(z) - \sigma(w)\|, \quad d(z, \infty) = \|\sigma(z) - P\|,$$

jossa $\|\cdot\|$ on euklidinen metriikka \mathbb{R}^3 :ssa. Sille voidaan johtaa lausekkeet

$$d(z, w) = \frac{|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2}\sqrt{1 + |w|^2}}, \quad d(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}},$$

kun $z, w \in \mathbb{C}$ (harjoitustehtävä). Metriikkaa d kutsutaan laajennetun kompleksitason *pallometriikaksi*. Sen rajoittuma \mathbb{C} :hen on ekvivalentti tavallisen metriikan $|z - w|$ kanssa, sillä kumpikin antavat \mathbb{C} :hen saman topologian.

Koska stereografinen projektio on homeomorfismi, laajennettu kompleksitaso on siis topologisesti täysin samanlainen kuin Riemannin pallo. Erityisesti $\overline{\mathbb{C}}$ on kompakti, koska \mathbb{S} on kompakti euklidisen avaruuden suljettuna ja rajoitettuna osajoukkona. Tämän voi toki päätellä helposti suoraankin esimerkiksi jonojen avulla.

5.10 Huomautus. Yllä esitetty tapa tulkita $\overline{\mathbb{C}}$ stereografisen projektion kautta on erityisen luonnollinen kompleksianalyysin kannalta siksin, että stereografinen projektio on konforminen eli kulmat säilyttävä. Lisäksi siinä tason suorat, joihin laajennetussa tasossa sisällytämme myös pisteen ∞ , vastaavat Riemannin pallon pohjoisnavan kautta kulkevia ympyröitä ja tason ympyrät vastaavat muita pallolla kulkevia ympyröitä. Puolitasot ja kiekot \mathbb{C} :ssä vastaavat puolestaan ympyräkalotteja Riemannin pallolla. (Nämä seikat on helppo uskoa eivätkä myöskään vaikeita todistaa. Sivuutamme kuitenkin todistukset tässä.)

Raja-arvot ja jatkuvuus $\overline{\mathbb{C}}$:ssä

Tarkastellaan jonoa (z_n) laajennetussa tasossa $\overline{\mathbb{C}}$. Koska ”kiekot” $D(\infty, r)$ muodostavat pisteen ∞ ympäristökanan, suppenemisen tavallinen määritelmä sanoo, että $z_n \rightarrow \infty$ jos ja vain jos jokaisella $r > 0$ on olemassa luku $N(r)$ siten, että $z_n \in D(\infty, r)$ kun $n > N(r)$. Ehto $z_n \in D(\infty, r)$ tarkoittaa, että $|z_n| > r$ tai $z_n = \infty$. Havaitsemme tästä, että $z_n \rightarrow \infty$ laajennetussa kompleksitasossa jos ja vain jos $|z_n| \rightarrow +\infty$ reaalilukujonon (epäoleellisen) raja-arvon mielessä.

Tässä yhteydessä on huomattava, että laajennetussa kompleksitasossa on vain yksi äärettömyyspiste – toisin kuin reaaliakselin tyypillisessä laajennuksessa kahdella äärettömyyspisteellä $\pm\infty$.

5.11 Esimerkki. Jos z on mielivaltainen kompleksiluku, jolle $|z| > 1$, niin $z^n \rightarrow \infty$ $\overline{\mathbb{C}}$:ssä. Jos x on reaaliluku, jolle $x < -1$, ja jonoa (x^n) tarkastellaan reaalilukujonona, sillä ei ole (epäoleellistakaan) raja-arvoa; pätee nimittäin $x^{2n} \rightarrow +\infty$ ja $x^{2n+1} \rightarrow -\infty$.

Vastaavalla tavalla kiekkoympäristöjen avulla käsitellään funktioiden raja-arvot tai jatkuvuus äärettömyyspisteessä. Yleisesti pätee, että $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = b$ jos ja vain jos jokaisella $r > 0$ on olemassa $s > 0$ siten, että $f(z) \in D(b, r)$, kun $z \in D(a, s) \setminus \{a\}$. Tässä a ja/tai b voi olla äärettömyyspiste.

Useimmiten on kätevää palauttaa äärettömyyspistettä koskevat tarkastelut apukuvauksella $z \mapsto 1/z$ origoon. Jatkamme tämän kuvauksen luonnollisesti bijektioksi (itse asiassa homeomorfismiksi) $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ sopimalla, että $1/\infty = 0$ ja $1/0 = \infty$. Koska $z \in D(\infty, r) \Leftrightarrow 1/z \in D(0, 1/r)$, pätee

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = b &\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow 0} f(1/z) = b \quad (b \in \mathbb{C}) \\ \lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty &\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{f(z)} = 0 \quad (a \in \mathbb{C}) \\ \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty &\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{f(1/z)} = 0. \end{aligned}$$

Näin menetellen tarkastelut voidaan tehdä tutulla ”äärellisellä” analyysin koneistolla.

Analyyttisyys ja konformisuus $\overline{\mathbb{C}}$:ssä

Apukuvauksen $z \mapsto 1/z$ avulla laajennamme seuraavaksi analyyttisen funktion käsitteen koskemaan funktioita, jotka ovat määriteltyjä äärettömyyspisteen ympäristössä ja/tai saavat arvon ∞ .

5.12 Määritelmä. Oletetaan, että funktio f on määritelty pisteen ∞ ympäristössä $D(\infty, r)$ ja saa siellä arvoja \mathbb{C} :ssä.

- a) f on *analyttinen* ∞ :ssä, jos funktio $z \mapsto f(1/z)$ on analyttinen origossa.
- b) f on *konforminen* ∞ :ssä, jos yo. funktio $z \mapsto f(1/z)$ on konforminen origossa (eli sen derivaatta 0:ssa on $\neq 0$).

Mikäli funktio saa arvon ∞ , käytämme samaa ideaa. On kuitenkin hyödyllistä ja alan perinteen velvoittamaa ottaa tässä tilanteessa käyttöön uusi nimitys analyttisyydelle.

5.13 Määritelmä. Oletetaan, että funktio f on määritelty pisteen z_0 ympäristössä ja $f(z_0) = \infty$.

- a) Jos $z_0 \in \mathbb{C}$, f on *meromorfinen* z_0 :ssa, mikäli funktio $z \mapsto 1/f(z)$ on analyttinen z_0 :ssa.
- b) Jos $z_0 = \infty$, f on *meromorfinen* z_0 :ssa, mikäli funktio $z \mapsto 1/f(1/z)$ on analyttinen 0:ssa.

Kummassakin tapauksessa piste z_0 on f :n *napa*. Konformisuus määritellään analogisesti vaatimalla, että vastaavan yhdistetyn funktion derivaatan arvo z_0 :ssa tai 0:ssa on $\neq 0$.

5.14 Huomautus. Kun funktioteoriassa puhutaan *analyttisistä* funktioista, tarkoitetaan ainakin pääsääntöisesti funktioita, joiden arvot ovat (äärellisiä) kompleksilukuja. Äärettömyyspiste saattaa kuitenkin kuulua funktion määrittelyjoukkoon. Jos halutaan sallia navat, puhutaan *meromorffifunktioista*. Yksi syy tähän erotteluun on se, että kompleksiarvoisilla analyttisillä funktioilla on joitakin ominaisuuksia, jotka puuttuvat yleisiltä meromorffifunktioilta.

5.15 Esimerkki. Olkoon

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 4}.$$

Funktio f on selvästi analyyttinen joukossa $\mathbb{C} \setminus \{\pm 2\}$. Jatkamme sen koko laajennettuun tasoon asettamalla $f(\pm 2) = \infty$ ja $f(\infty) = 0$. Tällöin f on jatkuva $\overline{\mathbb{C}}$:ssä.

Funktio

$$f(1/z) = \frac{z}{1 - 4z^2}$$

on analyyttinen origossa (ts. jossakin origon ympäristössä), joten f on analyyttinen ∞ :ssä. Itse asiassa se on siellä jopa konforminen (tarkista laskemalla derivaatan arvo!). Toisaalta funktio

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{z^2 - 4}{z}$$

on analyyttinen pisteissä ± 2 , joten nämä pisteet ovat f :n napoja ja f on niissä meromorfinen (jopa konforminen).

Kaiken kaikkiaan voidaan sanoa, että f on laajennetussa kompleksitasossa meromorfinen funktio, jolla on navat ± 2 .

5.16 Esimerkki. a) Tarkastellaan polynomia $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$, joka on astetta $n \geq 1$; oletamme siis, että $a_n \neq 0$. Määritellään $P(\infty) = \infty$. Koska polynomilla on vain äärellinen määrä nollakohtia, on $P(z) \neq 0$, kun $|z|$ on riittävän suuri. Tämän voi myös nähdä seuraavasti (kajoamatta nollakohtiin sinänsä) kolmioepäyhtälön avulla:

$$\begin{aligned} |P(z)| &\geq |a_n||z|^n - |a_{n-1}||z|^{n-1} - \dots - |a_0| \\ &= |z|^n \left(|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \dots - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right) > 0, \end{aligned}$$

kunhan vain $|z|$ on riittävän suuri. Siten $P(1/z) \neq 0$, kun $|z| < r$ kyllin pienelle $r > 0$. Näillä z voimme kirjoittaa

$$\frac{1}{P(1/z)} = \frac{1}{a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_nz^{-n}} = \frac{z^n}{a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n}.$$

Tämä funktio on analyyttinen pisteessä $z = 0$, joten P on meromorfinen ∞ :ssä.

Näemme siis, että jokainen astetta $n \geq 1$ oleva polynomi on aina meromorfinen pisteessä ∞ . (Lisätehtävänä toteaa, että se on konforminen ∞ :ssä vain tapauksessa $n = 1$.) Astetta nolla oleva polynomi on vakiofunktio ja siis triviaalisti analyyttinen pisteessä ∞ .

b) Tarkastellaan yleisemmin rationaalifunktiota

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n(z - z_1) \cdots (z - z_n)}{b_m(z - w_1) \cdots (z - w_m)},$$

jossa $P(z) = a_n(z - z_1) \cdots (z - z_n)$ ja $Q(z) = b_m(z - w_1) \cdots (z - w_m)$ ovat polynomeja ja $a_n, b_m \neq 0$. Oletamme, että tämä on R :n ns. supistettu muoto, jolloin P ja Q ovat keskenään jaottomia eli niillä ei ole yhteisiä nollakohtia. Aikaisemman perusteella (ks. seuraus 3.6) tiedämme, että R on analyyttinen pisteissä $z \neq w_1, \dots, w_m, \infty$.

Jatkamme R :n nimittäjän nollakohtiin asettamalla $R(w_j) = \infty$ kaikilla $j = 1, \dots, m$. Tällöin pisteet w_j ovat R :n napoja, joissa R on meromorfinen. Jatke äärettömyyspisteeseen riippuu osoittajan ja nimittäjän asteista. Jos $n > m$, saadaan kuten polynomin tapauksessa, että R on meromorfinen ∞ :ssä, kun $R(\infty) = \infty$. Muutoin R on analyyttinen ∞ :ssä, kun asetetaan $R(\infty) = a_n/b_n$ tapauksessa $n = m$ ja $R(\infty) = 0$ tapauksessa $n < m$. (Tarkista nämä väitteet harjoitustehtävänä!)

6 Möbius-kuvaukset ja kuvaustehtäviä

Möbius-kuvaukset ovat ensimmäisen asteen rationaalifunktioita. Ne ovat laajennetun kompleksitason konformisia bijektioita itselleen. Niillä on monia hyödyllisiä geometrisia ominaisuuksia, ja niiden avulla voidaan ratkaista erilaisia kuvaustehtäviä, mm. kuvata puolitaso konformisesti kiekolle.

Möbius-kuvaukset

6.1 Määritelmä. Funktio $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$,

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

on Möbius-kuvaus, kun $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ja $ad - bc \neq 0$.

Jos ehto $ad - bc \neq 0$ ei olisi voimassa, f olisi vakio tai mieletön (harjoitustehtävä). Kuten esimerkissä 5.16b on selitetty, sovimme yo. määritelmässä, että $f(-d/c) = \infty$ ja $f(\infty) = a/c$ tapauksessa $c \neq 0$ ja $f(\infty) = \infty$ tapauksessa $c = 0$. Tällöin f on meromorfinen ja erityisesti jatkuva $\overline{\mathbb{C}}$:ssä. Paljon enemmänkin on totta:

6.2 Lause. Möbius-kuvaus f on konforminen bijektio $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, jonka käänteiskuvaus f^{-1} on myös Möbius-kuvaus.

Todistus. Olkoon f kuten määritelmässä edellä. Harjoitustehtävänä on laskettu

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0,$$

kun $z \neq \infty$ ja $z \neq -d/c$ (jos $c \neq 0$). Tästä seuraa f :n konformisuus lukuunottamatta näitä yhtä tai kahta pistettä. Olkoon $c \neq 0$. Kirjoitamme $1/f(z) = (cz + d)/(az + b)$ ja havaitsemme, että tämä on konforminen pisteessä $z = -d/c$, joka on $\neq -b/a$ kertoimia koskevan ehdon takia. Siten f on konforminen tässä pisteessä, joka on f :n napa. Samoin $f(1/z) = (a + bz)/(c + dz)$ on konforminen 0:ssa, joten f on konforminen ∞ :ssä. Konformisuus ∞ :ssä tapauksessa $c = 0$ jääköön lukijalle.

Määritellään

$$g(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

Tämä on Möbius-kuvaus, sillä $da - (-b)(-c) = ad - bc \neq 0$. Suora lasku osoittaa, että $g(f(z)) = z$ kaikilla $z \in \overline{\mathbb{C}}$ ja $f(g(w)) = w$ kaikilla $w \in \overline{\mathbb{C}}$. (Navat ja piste ∞ on syytä tarkistaa erikseen tai sitten voi todeta, kuten jatkossa usein teemme, että koska yhtäsuuruus pätee kaikkialla muualla, se pätee jatkuvuuden nojalla myös näissä pisteissä.) Siten f on bijektio ja $g = f^{-1}$. \square

6.3 Lause. *Kahden Möbius-kuvauksen yhdiste on Möbius-kuvaus.*

Todistus. Olkoot

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad g(w) = \frac{a'w + b'}{c'w + d'}$$

Möbius-kuvauksia. Suoralla laskulla, jonka välivaiheet sivuutamme, nähdään

$$(g \circ f)(z) = \frac{a'f(z) + b'}{c'f(z) + d'} = \frac{(aa' + cb')z + ba' + db'}{(ac' + cd')z + bc' + dd'}.$$

Tämä on Möbius-kuvaus. Kertoimia koskevan ehdon voi nimittäin tarkistaa laskemalla tai sitten voi päätellä, että koska f ja g ovat bijektioita, myös $g \circ f$ on bijektio ja erityisesti ei-vakio. \square

Kaksi edellistä lausetta kertovat yhdessä, että Möbius-kuvaukset muodostavat *ryhmän* funktioiden yhdistämisen eli kuvaustulon \circ suhteen. Neutraalialkiona on identtinen kuvaus $z \mapsto z$.

6.4 Esimerkki. Möbius-kuvauksia ovat esimerkiksi:

- a) $z \mapsto z + a$, jossa $a \in \mathbb{C}$ (yhdensuuntaissiirto)
- b) $z \mapsto az$, jossa $a \neq 0$ (homotetia ja kierto; vrt. esim. 3.2b)
- c) $z \mapsto 1/z$ (inversio)

Harjoitustehtävässä osoitetaan, että jokainen Möbius-kuvaus voidaan esittää yhdisteenä tällaisista kuvauksista. Siten yllä luetellut Möbius-kuvaukset itse asiassa *virittävät* Möbius-kuvausten ryhmän.

6.5 Huomautus. Kahden edellisen lauseen tuloksia ja todistuksia voi tulkita kätevästi myös matriisiryhmien näkökulmasta. Jokaista kääntyvää kompleksikertoimista 2×2 -matriisia vastaa luonnollisella tavalla Möbius-kuvaus seuraavasti:

$$(6.6) \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \frac{az + b}{cz + d}.$$

Lauseke $ad - bc$ on yo. matriisin determinantti, ja se on $\neq 0$ täsmälleen silloin, kun matriisi on kääntyvä. Kuvaus (6.6) on ryhmähomomorfismi. Tämä selittää esimerkiksi kahden Möbius-kuvauksen yhdisteen kertoimet edellisessä todistuksessa, sillä

$$\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ba' + db' \\ ac' + cd' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

Kaksoissuhde

Kehitämme seuraavaksi työkalun, jolla voidaan konkreettisesti muodostaa Möbius-kuvauksia, joilla on halutut ominaisuudet, esimerkiksi joka vie annetun pistekolmikon toiselle annetulle pistekolmikolle. Ideana on etsiä suure, joka on invariantti Möbius-kuvauksessa.

Motivaatioksi teemme pari havaintoa. Yhdensuuntaissirrossa $w = z + b$ pisteiden väliset erotukset säilyvät: jos $w_0 = z_0 + b$ ja $w_1 = z_1 + b$, niin

$$w_0 - w_1 = z_0 - z_1.$$

Yleisempi affiini kuvaus $w = az + b$ ei säilytä erotuksia mutta se säilyttää sellaisten suhteet: jos $w_j = az_j + b$ ($j = 0, 1, 2$), niin

$$\frac{w_0 - w_1}{w_0 - w_2} = \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2}$$

(tarkista harjoitustehtävänä).

Entä yleiset Möbius-kuvaukset? Olisiko niillä tämäntyyppinen invariantti?

6.7 Määritelmä. Oletetaan, että z_0, z_1, z_2, z_3 ovat eri pisteitä \mathbb{C} :ssä. Niiden *kaksoissuhde* on luku

$$(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_3} : \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} = \frac{(z_0 - z_2)(z_1 - z_3)}{(z_0 - z_3)(z_1 - z_2)}.$$

Jos jokin pisteistä on ∞ tai jotkin kaksi niistä yhtyvät, määritellään (z_0, z_1, z_2, z_3) vastaavana raja-arvona.

6.8 Esimerkki.

$$\begin{aligned} (z_0, z_0, z_2, z_3) &= 1 \\ (z_0, z_1, z_2, \infty) &= \frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2} \\ (z_0, 1, 0, \infty) &= z_0 \end{aligned}$$

Haluamme tutkia, miten kaksoissuhteiden avulla voi muodostaa halutunlaisia Möbius-kuvauksia. Aloitamme erikoistapauksella:

6.9 Apulause. *Olkoot $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ eri pisteitä. Tällöin $g(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$ on Möbius-kuvaus, joka vie pisteet z_1, z_2, z_3 pisteille $1, 0, \infty$ tässä järjestyksessä. Muita Möbius-kuvauksia, joilla olisi tämä ominaisuus, ei ole.*

Todistus. Oletamme, että $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Tällöin

$$g(z) = \frac{z - z_2}{z - z_3} : \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} = \frac{(z - z_2)(z_1 - z_3)}{(z - z_3)(z_1 - z_2)}.$$

Tästä nähdään suoraan, että g on Möbius-kuvaus ja $g(z_1) = 1$, $g(z_2) = 0$ sekä $g(z_3) = \infty$.

Yksikäsitteisyyden osoittamiseksi oletetaan, että h on Möbius-kuvaus, jolla on sama ominaisuus. Tällöin (edellisten lauseiden nojalla) $g \circ h^{-1}$ on myös Möbius-kuvaus ja se pitää pisteet $1, 0$ ja ∞ paikoillaan. Kirjoitetaan

$$(g \circ h^{-1})(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Ehdosta $(g \circ h^{-1})(0) = 0$ seuraa $b = 0$. Ehdosta $(g \circ h^{-1})(\infty) = \infty$ puolestaan seuraa $c = 0$. Mutta tällöin ehdosta $(g \circ h^{-1})(1) = 1$ seuraa $a = d$. Siten $(g \circ h^{-1})(z) = z$ kaikilla $z \in \overline{\mathbb{C}}$ eli $h = g$. \square

Pystymme nyt ratkaisemaan seuraavan *kuvaustehtävän*: On annettu laajennetun tason pisteet z_1, z_2, z_3 ja etsittävä Möbius-kuvaus, joka vie ne annetuille pisteille w_1, w_2, w_3 .

6.10 Lause. *Olkoot $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ eri pisteitä ja $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ niin ikään eri pisteitä. On olemassa yksikäsitteinen Möbius-kuvaus f , jolle pätee $f(z_j) = w_j$ ($j = 1, 2, 3$). Se saadaan yhtälön*

$$(w, w_1, w_2, w_3) = (z, z_1, z_2, z_3).$$

ratkaisuna $w = f(z)$, kun $z \in \overline{\mathbb{C}}$.

Todistus. Olkoon $g(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$ ja $h(w) = (w, w_1, w_2, w_3)$. Edellisestä apulauseesta seuraa, että $h^{-1} \circ g$ on Möbius-kuvaus, joka vie pisteet z_1, z_2, z_3 pisteille w_1, w_2, w_3 tässä järjestyksessä. Tämä on väitetty f , sillä yhtälö $h(w) = g(z)$ voidaan kirjoittaa yhtäpitävästi muodossa $w = (h^{-1} \circ g)(z)$. Yksikäsitteisyyden jätämme harjoitustehtäväksi. \square

Lauseen 6.10 seurauksena nähdään, että kaksoissuhde on *invariantti* Möbius-kuvauksessa f :

$$(f(z_0), f(z_1), f(z_2), f(z_3)) = (z_0, z_1, z_2, z_3).$$

6.11 Esimerkki. a) Etsittävä se Möbius-kuvaus f , jolle $f(0) = 1$, $f(1) = 2$ ja $f(2) = 3$. Vastaus on ilmeinen: $f(z) = z + 1$. Katsotaan, kuinka tämä saadaan kaksoisuhdetta käyttäen. Edellisen lauseen mukaan on ratkaistava yhtälö $(w, 1, 2, 3) = (z, 0, 1, 2)$, jossa

$$(w, 1, 2, 3) = \frac{w-2}{w-3} : \frac{1-2}{1-3} = \frac{w-2}{2(w-3)},$$

$$(z, 0, 1, 2) = \frac{z-2}{z-3} : \frac{0-1}{0-2} = \frac{z-1}{2(z-2)}.$$

Siis saadaan yhtälö $(w-2)/(w-3) = (z-1)/(z-2)$, josta helposti ratkeaa $w = z + 1$ kuten jo tiesimmekin.

b) Etsittävä se Möbius-kuvaus g , jolle $g(-1) = -1$, $g(1) = 1$ ja $g(0) = i$. Laskemme aluksi

$$(w, -1, 1, i) = \frac{w-1}{w-i} : \frac{-1-1}{-1-i} = \frac{(1+i)(w-1)}{2(w-i)},$$

$$(z, -1, 1, 0) = \frac{z-1}{z-0} : \frac{-1-1}{-1-0} = \frac{z-1}{2z}.$$

Yhtälö $(w, -1, 1, i) = (z, -1, 1, 0)$ saa tästä muodon

$$(1+i) \frac{w-1}{w-i} = \frac{z-1}{z},$$

josta parin välivaiheen jälkeen saamme ratkaisuksi

$$w = g(z) = \frac{z+i}{iz+1}.$$

(Tarkista, että pisteet -1 , 1 ja 0 todella kuvautuvat halutulla tavalla!)

6.12 Huomautus. Esitetyn kuvaustehtävän voi ratkaista ilman kaksoissuhdettakin. Kirjoitetaan etsitty kuvaus muodossa $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ja pyritään määrittämään sopivat kertoimet a, b, c, d yhtälöistä $f(z_j) = \frac{az_j+b}{cz_j+d} = w_j$ ($j = 1, 2, 3$). Tämä on kätevää erityisesti silloin kun 0 ja ∞ esiintyvät annettujen pisteiden joukossa.

Möbius-ympyrät Möbius-kuvauksessa

Tutkimme seuraavaksi suorien ja ympyröiden kuvautumista Möbius-kuvauksessa. Tunnetusti kolme pistettä määrittävät joko ympyrän tai suoran tasossa: mikäli pisteet eivät ole samalla suoralla, niiden kautta kulkee täsmälleen yksi ympyrä. Kun työskentelemme laajennetussa kompleksitasossa, sisällytämme jokaiseen suoraan myös äärettömyyspisteen ∞ . Kuten huomautuksessa 5.10 totesimme, Riemannin pallolla sekä suorat että ympyrät vastaavat ympyröitä. Nämä havainnot kertovat siitä, että laajennetussa kompleksitasossa ympyrät ja suorat ovat oikeastaan ekvivalentteja. Otammekin käyttöön seuraavan (epästandardin) nimityksen:

6.13 Määritelmä. *Möbius-ympyrä* laajennetussa kompleksitasossa $\bar{\mathbb{C}}$ on joko \mathbb{C} :n ympyrä tai \mathbb{C} :n suoran ja äärettömyyspisteen yhdiste.

Tavoitteemme on todistaa seuraava tulos:

6.14 Lause. *Jos $S \subset \bar{\mathbb{C}}$ on Möbius-ympyrä ja f on Möbius-kuvaus, niin $f(S)$ on Möbius-ympyrä.*

Aloitamme apulauseella, joka kertoo, miltä suorien ja ympyröiden yhtälöt näyttävät kompleksimuodossa.

6.15 Apulause. *a) Jokaisella \mathbb{C} :n suoralla on yhtälö muotoa*

$$\alpha z + \bar{\alpha} \bar{z} + c = 0 \quad (\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, c \in \mathbb{R}).$$

Kääntäen tällainen yhtälö aina esittää \mathbb{C} :n suoraa.

b) Jokaisella \mathbb{C} :n ympyrällä on yhtälö muotoa

$$z\bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha} \bar{z} + c = 0 \quad (\alpha \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{R}, |\alpha|^2 > c).$$

Kääntäen tällainen yhtälö aina esittää \mathbb{C} :n ympyrää.

Todistus. a) Suoran yhtälö on tunnetusti reaalisiin merkinnöin muotoa $ax + by + c = 0$, jossa $a, b, c \in \mathbb{R}$ ja ainakin toinen kertoimista a ja b on $\neq 0$. Kun sijoitetaan tähän $z = x + iy$ eli $x = (z + \bar{z})/2$ ja $y = (z - \bar{z})/2i$ saadaan yhtäpitävä yhtälö

$$\frac{1}{2}(a - ib)z + \frac{1}{2}(a + ib)\bar{z} + c = 0,$$

joka on juuri haluttua muotoa.

b) Tarkastellaan ympyrää, jonka keskipiste on $z_0 \in \mathbb{C}$ ja säde $r > 0$. Sen yhtälö on siis $|z - z_0| = r$. Korottamalla puolittain toiseen saamme yhtälön $(z - z_0)(\overline{z - z_0}) = r^2$ eli

$$z\bar{z} - z\bar{z}_0 - \bar{z}z_0 + z_0\bar{z}_0 - r^2 = 0.$$

Tämä tulee haluttuun muotoon, kun merkitään $\alpha = -\bar{z}_0$ ja $c = z_0\bar{z}_0 - r^2 = |\alpha|^2 - r^2$. Huomaa, että tässä $|\alpha|^2 > c$. \square

Lauseen 6.14 todistus. Esimerkin 6.4 Möbius-kuvauksista siirrot, homotetiat ja kierrot selvästikin kuvaavat suorat suorille ja ympyrät ympyröille. Yleisesti tämä pätee kaikille affineille kuvauksille $z \mapsto az + b$. Koska jokainen Möbius-kuvaus voidaan esittää yhdisteenä tällaisista kuvauksista ja inversioista $z \mapsto 1/z$, riittää, että todistamme lauseen siinä tapauksessa, että f on inversio: $f(z) = 1/z$.

Oletetaan, että Möbius-ympyrän S yhtälö on

$$qz\bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + c = 0,$$

jossa $q = 0$ (suora) tai $q = 1$ (ympyrä) ja $\alpha \in \mathbb{C}$ ja $c \in \mathbb{R}$ ovat kuten apulauseessa edellä. Nyt $w \in f(S) \Leftrightarrow 1/w = f^{-1}(w) \in S \Leftrightarrow$

$$qw^{-1}\bar{w}^{-1} + \alpha w + \bar{\alpha}\bar{w}^{-1} + c = 0 \Leftrightarrow cw\bar{w} + \bar{\alpha}w + \alpha\bar{w} + q = 0.$$

Jos $c = 0$ (eli $0 \in S$), tämä saa muodon $\bar{\alpha}w + \alpha\bar{w} + q = 0$, joka on suora. On huomattava, että myös $\infty \in f(S)$, koska $0 \in S$. Jos taas $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, voidaan yo. yhtälö saattaa muotoon

$$w\bar{w} + (\alpha/c)\bar{w} + (\alpha/c)w + q/c = 0,$$

joka on ympyrä. \square

Jos halutaan selvittää konkreettisesti, mikä on annetun Möbius-ympyrän S kuva annetussa Möbius-kuvauksessa f , voidaan nyt menetellä seuraavasti: valitaan kolme S :n pistettä, lasketaan niiden kuvat f :ssä ja määritetään näiden kuvapisteen kautta kulkeva Möbius-ympyrä.

Jos kääntäen halutaan muodostaa Möbius-kuvaus, joka vie annetun Möbius-ympyrän S toiselle annetulle Möbius-ympyrälle S' , valitaan kolme pistettä $z_1, z_2, z_3 \in S$ ja samoin kolme pistettä $w_1, w_2, w_3 \in S'$ sekä etsitään aikaisemmin opitulla tavalla (esim. Lauseen 6.10 avulla) Möbius-kuvaus f , jolle $f(z_j) = w_j$ ($j = 1, 2, 3$). Tällöin Lauseen 6.14 nojalla välttämättä $f(S) = S'$.

6.16 Esimerkki. Selvitetään, mikä on yksikköympyrän $S^1 = \{z : |z| = 1\}$ kuva kuvauksessa

$$f(z) = \frac{z+i}{iz+1}.$$

Pisteen $i \in S^1$ kuva on ∞ , joten kuva on suora. Piste $1 \in S^1$ kuvautuu pisteelle 1 ja $-1 \in S^1$ pisteelle -1 , joten kyseinen suora on reaaliakseli.

Alueiden konformikuvaustehtäviä

Tarkastelemme nyt joitakin erikoistapauksia – erityisesti Möbius-kuvausten avulla ratkeavia – seuraavasta yleisestä *konformikuvaustehtävästä*:

On annettu alueet A ja A' laajennetussa kompleksitasossa. On selvitettävä, onko olemassa konforminen bijektio $A \rightarrow A'$. Jos on, on pyrittävä esittämään sellainen mahdollisimman konkreettisesti.

Palautetaan tässä mieleen (ks. luvun 2 loppu), että joukko A on alue jos ja vain jos se on avoin ja (polku)yhtenäinen.

Olkoon $S \subset \overline{\mathbb{C}}$ jokin Möbius-ympyrä. Tällöin S jakaa $\overline{\mathbb{C}}$:n kahteen alueeseen: avoimella joukolla $\overline{\mathbb{C}} \setminus S$ on nimittäin kaksi yhtenäistä komponenttia, joiden kummankin reuna laajennetussa tasossa on S . Olkoot nämä komponentit A_1 ja A_2 . Mikäli S on suora, kumpikin näistä on

i) avoin puolitaso,

ja mikäli S on ympyrä, kyseessä ovat

ii) avoin kiekko $D(a, r)$ sopivilla $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ ja

iii) ”ympyrän ulkopuoli” sekä äärettömyyspiste, ts. joukko muotoa $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}(a, r)$.

Riemannin pallolla kaikki nämä aluetyypit vastaavat ympyräkalotteja; erityisesti ne ovat keskenään homeomorfisia.

Oletetaan sitten, että S ja S' ovat molemmat Möbius-ympyröitä. Yllä kuvatulla tavalla S jakaa laajennetun tason alueisiin A_1 ja A_2 , ja S' puolestaan alueisiin A'_1 ja A'_2 . Kuten edellisessä jaksossa opimme, on aina mahdollista esim. kaksoissuhteiden avulla muodostaa Möbius-kuvaus f , jolle $f(S) = S'$. Lauseen 6.2 nojalla f on laajennetun tason konforminen bijektio itselleen ja erityisesti homeomorfismi (ts. f ja f^{-1} ovat jatkuvia). Tästä seuraa, että se säilyttää myös komponenttirakenteen: pätee joko $f(A_1) = A'_1$ ja $f(A_2) = A'_2$ tai sitten $f(A_1) = A'_2$ ja $f(A_2) = A'_1$. (Yhtenäisyyden osalta ks. erityisesti lause 2.24). Tässä aluetyypit i–iii saattavat hyvinkin kuvautua toisikseen.

6.17 Esimerkki. Inversio $z \mapsto 1/z$ kuvaa yksikköympyrän $S^1 = \{z : |z| = 1\}$ itselleen mutta vaihtaa sen ”sisäpuolen” $D(0, 1)$ ja ”ulkopuolen” $D(\infty, 1) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}(0, 1)$ keskenään.

Yksittäistapauksessa voi komponenttien vastaavuuden tutkia ottamalla jonkin testipisteen $z \in A_1$ ja katsomalla, onko sen kuva $f(z)$ alueessa A'_1 vai A'_2 . Tämä on kuitenkin epätydyttävää sikäli, että usein haluaisimme jo etukäteen kuvausta f konstruoida varmistaen siitä, että esimerkiksi alue A_1 kuvautuu alueelle A'_1 . Tässä voi käyttää seuraavaa havainnollista kriteeriä, jossa Möbius-ympyrä suunnistetaan kolmen pisteen avulla ja identifioidaan sen rajaamat kaksi aluetta tämän suunnistuksen perusteella:

6.18 Lause. Olkoon $S \subset \overline{\mathbb{C}}$ Möbius-ympyrä ja $z_1, z_2, z_3 \in S$ eri pisteitä. Tällöin

$$S = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : (z, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\}$$

ja joukon $\overline{\mathbb{C}} \setminus S$ komponentit ovat

$$A_1 = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \text{Im}(z, z_1, z_2, z_3) < 0\},$$

$$A_2 = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \text{Im}(z, z_1, z_2, z_3) > 0\}.$$

Havainnollisesti nämä voidaan tunnistaa seuraavasti: kun S :ää kuljetaan z_1 :stä lähtien z_2 :n kautta z_3 :een, A_1 jää vasemmalle ja A_2 oikealle.

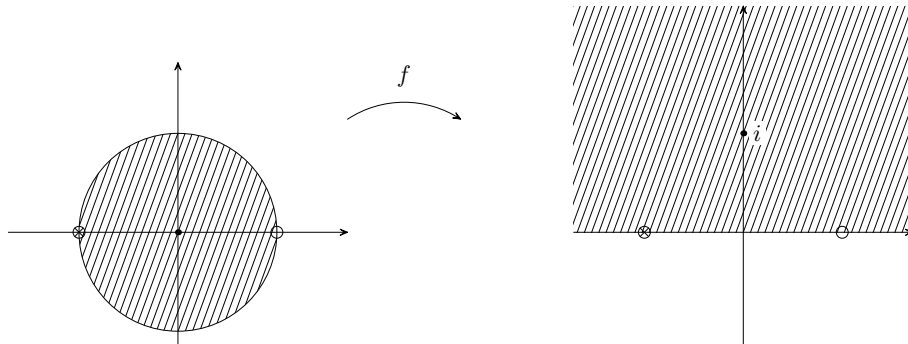
Todistus. Käyttämällä lausetta 6.10 voimme olettaa, että $z_1 = 1$, $z_2 = 0$ ja $z_3 = \infty$, jolloin $S = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Tällöin $(z, z_1, z_2, z_3) = z$, joten $A_1 = \{z : \text{Im } z < 0\}$ on alempi puolitaso ja $A_2 = \{z : \text{Im } z > 0\}$ on ylempi puolitaso. Lisäksi järjestys $1, 0, \infty$ merkitsee, että S :ää kuljetaan oikealta vasemmalle, jolloin A_1 jää vasemmalle ja A_2 oikealle kuten pitääkin. \square

Koska kaksoissuhde on invariantti Möbius-kuvauksessa f , tästä lauseesta seuraa, että jos Möbius-ympyrä S suunnistetaan pisteiden z_1, z_2, z_3 osoittamalla tavalla ja $f(S) = S'$ vastaavasti pisteiden $f(z_1), f(z_2), f(z_3)$ osoittamalla tavalla, niin S :n vasemmalle puolelle jäävä alue kuvautuu S' :n vasemmanpuoliselle alueelle ja sama pätee oikeanpuolisille alueille.

6.19 Esimerkki. Olkoon f esimerkissä 6.16 käsitelty Möbius-kuvaus,

$$f(z) = \frac{z+i}{iz+1}.$$

Tiedämme jo, että se kuvaa yksikköympyrän reaaliakselille. Näin ollen yksikkökierokkeen $D(0, 1)$ kuva on ylempi tai alempi puolitaso. Koska $f(0) = i$, kyseessä on ylempi puolitaso $\mathbb{H} = \{z : \text{Im } z > 0\}$. Tämän voi nähdä jo siitä, että esimerkin 6.16 mukaan reunapisteille pätee $f(i) = \infty$, $f(1) = 1$ ja $f(-1) = -1$. Kun nimittäin yksikköympyrää kierretään pisteiden $i, 1, -1$ määräämään suuntaan eli myötäpäivään, yksikkökierokke jää oikealle; vastaavasti ylempi puolitaso \mathbb{H} jää oikealle, kun reaaliakselia kuljetaan pisteiden $\infty, 1, -1$ määräämään suuntaan eli oikealta vasemmalle.

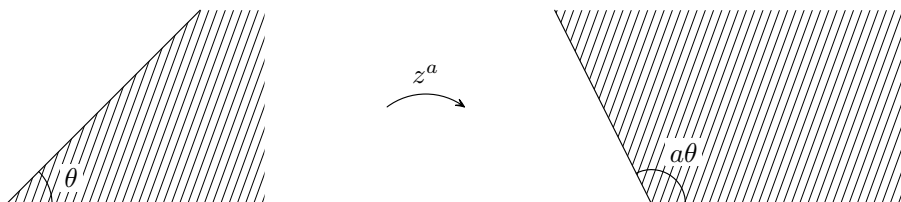


Möbius-kuvausten ohella voimme käyttää konformikuvaustehtävissä myös muita aikaisemmin opittuja funktioita. Tarkastelemme tässä lyhyesti potenssi- ja juurifunktioiden sekä eksponenttifunktion käyttöä.

Potenssi- ja juurifunktiot. Näitä voi käyttää kuvattaessa origosta lähtevä sektori puolitasolle tai päinvastoin. Jos esimerkiksi $k > 1$ on kokonaisluku, niin $z \mapsto z^k$ vie sektorin $\{z : 0 < \arg z < \pi/k\}$ konformisesti ja bijektiivisesti ylemmälle puolitasolle $\mathbb{H} = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$. Juuren $z \mapsto z^{1/k}$ päähaara (ks. luvun 3 loppu) toimii päinvastoin.

Yleisemmin: Jos $a, \theta > 0$ ovat sellaisia, että $\theta < \pi$ ja $a\theta < \pi$, niin potenssifunktio $z \mapsto z^a$ (päähaara) on konforminen bijektio sektorilta $\{z : 0 < \arg z < \theta\}$ sektorille $\{w : 0 < \arg w < a\theta\}$. Palautetaan mieleen, että napaesityksessä tämä kuvaus voidaan kirjoittaa

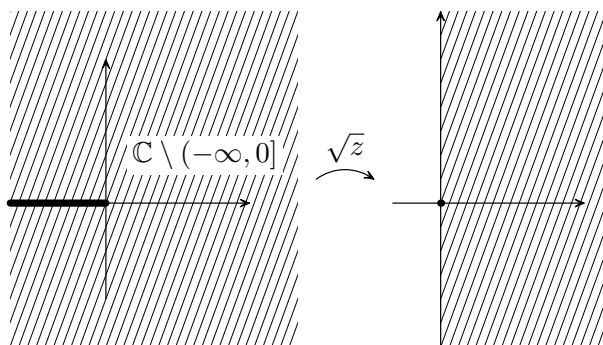
$$re^{i\varphi} \mapsto r^a e^{ia\varphi}, \quad \text{kun } |\varphi| < \pi.$$



Samoin tämä kuvaus myös kuvaa sektorin $\{z : |\arg z| < \theta\}$ konformisesti sektorille $\{w : |\arg w| < a\theta\}$.

6.20 Esimerkki. Tehtävänä on etsiä jokin konformikuvaus negatiivista reaaliakselia pitkin aukileikatulta tasolta $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ yksikkökielelle $D(0, 1)$.

Aloitetaan kuvaamalla $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] = \{z : |\arg z| < \pi\}$ oikealle puolitasolle $H = \{w : \operatorname{Re} w > 0\} = \{w : |\arg w| < \pi/2\}$. Tämä voidaan tehdä neliöjuuren päähaaralla $z \mapsto \sqrt{z}$:



Seuraavaksi meidän on kuvattava H konformisesti yksikkökielelle; tehdään tämä sopivalla Möbius-kuvauksella g . Eräs tällainen saadaan ehdoista $g(0) = -1$, $g(i) = i$ ja $g(\infty) = 1$, sillä $0, i, \infty$ ovat imaginaariakselin pisteitä ja oikea puolitaso jää niiden mukaan suunnistetun imaginaariakselin oikealle puolelle, kun taas $-1, i, 1$ ovat yksikköympyrän pisteitä ja yksikkökiekkö jää niiden mukaan suunnistetun ympyränkehän oikealle puolelle. Tämä g voidaan ratkaista kaksoisuhdeyhtälöstä

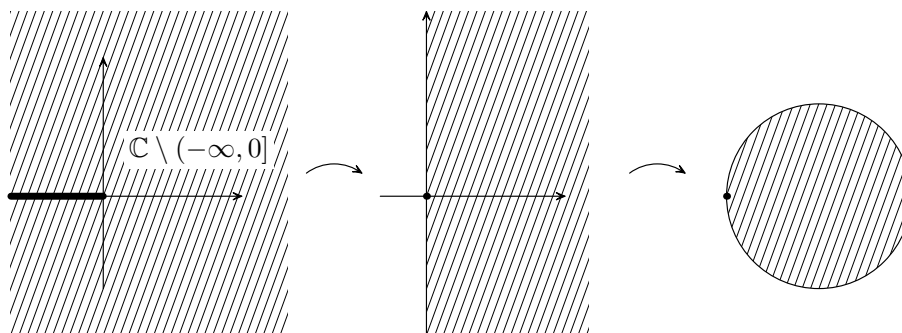
$$(g(z), -1, i, 1) = (z, 0, i, \infty),$$

josta saadaan (harjoitustehtävä)

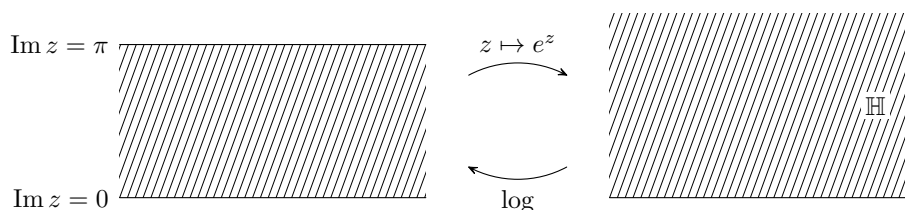
$$g(z) = \frac{z-1}{z+1}.$$

Yhdistämällä saadaan halutunlainen konformikuvaus $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow D(0, 1)$:

$$z \mapsto \sqrt{z} \mapsto \frac{\sqrt{z}-1}{\sqrt{z}+1}.$$



Eksponenttifunktio. Eksponenttifunktiolla voidaan kuvata vaakasuora vyö konformisesti puolitasolle tai sektorille. Esimerkiksi vyö $\{z : 0 < \text{Im } z < \pi\}$ kuvautuu konformisesti ylemmälle puolitasolle \mathbb{H} .



Logaritmi toimii vastakkaiseen suuntaan kuin eksponenttikuvaus: sen haaralla voi kuvata tason sektorin aina vaakasuoralle vyölle. (Selvitä itsellesi nämä eksponenttifunktiota ja logaritmia koskevat väitteet harjoitustehtävänä.)

6.21 Huomautus. Mainitsemme lisätietona seuraavan yleisen tuloksen: Jos A ja A' ovat sellaisia alueita $\overline{\mathbb{C}}$:ssä, että kummankin komplementti sisältää ainakin kaksi pistettä (ts. kumpikaan ei ole $\overline{\mathbb{C}}$ tai esimerkiksi \mathbb{C}) ja ne ovat topologisesti *yhdesti yhtenäisiä*, niin on olemassa konforminen bijektio $A \rightarrow A'$. Siis tällainen alue on aina ”konformisesti ekvivalentti” esimerkiksi yksikkökierokan kanssa! Tämä tulos on nimeltään *Riemannin kuvauslause*, joka usein todistetaan kurssilla Funktioteoria II.

7 Potenssisarjat

Tulemme myöhemmin osoittamaan, että jokainen analyttinen funktio voidaan esittää ainakin lokaalisti suppenevan potenssisarjan summana, ts. muodossa $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$. Esimerkiksi eksponenttifunktiolle saamme koko kompleksitasossa esityksen $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$, joka reaaliosassa on tuttu analyysin peruskursseilta. Tarkastelemme tässä luvussa joitakin kompleksisiin potenssisarjoihin liittyviä peruskäsitteitä ja ominaisuuksia. Ne ovat pääpiirteissään samanlaisia kuin reaalisten sarjojen teoriassa.

Sarjan suppeneminen

Olkoot z_0, z_1, z_2, \dots kompleksilukuja, ja tarkastellaan sarjaa

$$(7.1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} z_k = z_0 + z_1 + z_2 + \dots$$

Kirjoitamme joskus lyhyemmin $\sum_k z_k$. Tämän *osasummat* ovat

$$S_n = \sum_{k=0}^n z_k, \quad n \geq 0,$$

ja sarja (7.1) *suppenee*, mikäli on olemassa raja-arvo $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \in \mathbb{C}$. Luku S on sarjan *summa*, ja merkitään $\sum_{k=0}^{\infty} z_k = S$. Jollei (7.1) suppene, se *hajaantuu*. Jos kirjoitetaan $z_k = x_k + iy_k$, niin nähdään, että $\sum_k z_k$ suppenee jos ja vain jos sekä $\sum_k x_k$ että $\sum_k y_k$ suppenevat.

Sarja (7.1) on *itseisesti suppeneva*, jos $\sum_k |z_k|$ suppenee. Koska jälkimmäisen sarjan osasummat muodostavat kasvavan jonon, voidaan tässä tapauksessa merkitä myös $\sum_k |z_k| < \infty$. Yhtäpitävää on, että $\sum_k |x_k| < \infty$ ja $\sum_k |y_k| < \infty$. Tästä voidaan päätellä helposti, että itseisesti suppeneva sarja on aina suppeneva tavallisessa mielessä.

Potenssisarjat ja suppenemissäde

Kompleksinen *potenssisarja* on muotoa

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots,$$

jossa $a_0, a_1, a_2, \dots \in \mathbb{C}$ (sarjan *kertoimet*), $z_0 \in \mathbb{C}$ (sarjan *keskus*) ja $z \in \mathbb{C}$ (muuttuja). Sovimme tässä yhteydessä aina, että $0^0 = 1$. Kiinnostavaa on erityisesti se, millä muuttujan z arvoilla ko. potenssisarja suppenee. Useimmissa tarkasteluissa voimme olettaa, että $z_0 = 0$; yleinen potenssisarja palautuu tähän origokeskiseen muotoon sijoituksella $w = z - z_0$.

7.2 Esimerkki. Geometrinen sarja $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ suppenee itseisesti, kun $|z| < 1$, sillä tällöin

$$\sum_{k=0}^{\infty} |z^k| = \sum_{k=0}^{\infty} |z|^k = \frac{1}{1-|z|} < \infty.$$

Sarjan summa lasketaan aivan kuten reaaliossa tapauksessa, ja se on

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1.$$

Jos $|z| \geq 1$, niin sarja hajaantuu, sillä $z^k \not\rightarrow 0$, kun $k \rightarrow \infty$.

Potenssisarjojen teorian keskeinen lähtökohta on seuraava havainto:

7.3 Apulause (Abelin lause). Jos $\sum_k a_k(z-z_0)^k$ suppenee pisteessä $z = z_1 \neq z_0$, se suppenee itseisesti jokaisella z , jolle $|z-z_0| < |z_1-z_0|$.

Todistus. Voidaan olettaa $z_0 = 0$. Koska $\sum_k a_k z_1^k$ suppenee, muodostavat sen termit rajoitetun (jopa nolnaan suppenevan) jonon: on olemassa $M < \infty$ siten, että $|a_k z_1^k| \leq M$ kaikilla $k \geq 0$. Niinpä jos $|z| < |z_1|$, saadaan

$$|a_k z^k| = \left| a_k z_1^k \left(\frac{z}{z_1} \right)^k \right| \leq M q^k, \quad \text{jossa } q = \frac{|z|}{|z_1|} < 1.$$

Siis sarjalla $\sum_k |a_k z^k|$ on majoranttina suppeneva geometrinen sarja, joten se itsekin suppenee. \square

7.4 Määritelmä. Potenssisarjan (*) $\sum_k a_k(z-z_0)^k$ suppenemissäde on

$$R = \sup\{|z-z_0| : (*) \text{ suppenee pisteessä } z\}.$$

Tämä on ei-negatiivinen reaaliluku tai ∞ (eli $+\infty$).

Abelin lause kertoo, että jos sarja (*) suppenee pisteessä z_1 , se suppenee kaikilla z , joille $|z-z_0| < |z_1-z_0|$. Toisaalta siitä seuraa (epäsuorasti päättellessä), että jos (*) hajaantuu pisteessä z_1 , niin se hajaantuu kaikilla z , joille $|z-z_0| > |z_1-z_0|$. Näistä havainnoista seuraa helposti seuraava tulos (mietä todistus harjoitustehtävänä):

7.5 Lause. Sarjan (*) $\sum_k a_k(z-z_0)^k$ suppenemiselle on kolme vaihtoehtoa:

- $R = 0$: (*) suppenee vain pisteessä $z = z_0$.
- $0 < R < \infty$: (*) suppenee (itseisesti), kun $|z-z_0| < R$, ja hajaantuu, kun $|z-z_0| > R$.
- $R = \infty$: (*) suppenee (itseisesti) kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

Jos $0 < R < \infty$, kiekkoa $D(z_0, R)$ kutsutaan potenssisarjan (*) suppenemiskiekoksi. (Tapauksissa $R = 0$ ja $R = \infty$ olisi johdonmukaisinta sopia, että suppenemiskiekkona on vastaavasti \emptyset tai \mathbb{C} .) Ympyrällä $|z-z_0| = R$ voi olla sekä pisteitä, joissa sarja suppenee, että pisteitä, joissa se hajaantuu, ja asian selvittäminen voi olla hankalaa eikä edes yleensä tarpeen.

Miten suppenemissäde voidaan laskea kertoimien a_k avulla? Tässä voi käyttää suppenemistestejä, jotka ovat analyysin peruskursseilta tuttuja reaalisille sarjoille:

- *Suhdetesti*: Jos on olemassa raja-arvo $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|/|a_{k+1}| = R$, niin kyseessä on sarjan (*) suppenemissäde.
- *Juuritesti*: Jos on olemassa raja-arvo $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k} = S$, niin sarjan (*) suppenemissäde on $R = 1/S$. (Jos $S = 0$, niin $R = \infty$, ja jos $S = \infty$, niin $R = 0$.)

Näiden todistukset ovat samanlaiset kuin reaalisisä tapauksessa; jälkimmäisen todistamme kohta yleisemmässä muodossa.

Hadamardin lause

Kumpaakaan suhde- ja juuritestin raja-arvoista ei ole välttämättä olemassa. Esitämekin yleisen kaavan, joka perustuu reaalisen lukujonon *yläraja-arvon* (limes superior) käsitteeseen. Kun (x_k) on reaalilukujono, määritellään

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} = \inf_{n \geq 1} \sup \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}.$$

Huomaa, että yläraja-arvo on hyvinmääritelty (mahdollisesti $\pm\infty$) jokaiselle reaalilukujonolle. Jos $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ on olemassa, on aina $\limsup_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$.

Jonon (x_k) yläraja-arvo voidaan luonnehtia monella tavalla. Se on suurin jonon (x_k) reaalisisä *kasautumisarvoista* tai $\pm\infty$. Luku $x \in \mathbb{R}$ on jonon (x_k) kasautumisarvo, mikäli jokainen x :n ympäristö $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ sisältää jäsenen x_k äärettömän monella indeksin k arvolla tai yhtäpitävästi jokin (x_k) :n osajono suppenee kohti x :ää. $\limsup_{k \rightarrow \infty} x_k = +\infty$ merkitsee, että jonossa (x_k) on mielivaltaisen suuria jäseniä, ja $\limsup_{k \rightarrow \infty} x_k = -\infty$ puolestaan merkitsee, että $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = -\infty$.

Harjoitustehtävässä todetaan seuraava: Kun $S \in \mathbb{R}$, niin $\limsup_{k \rightarrow \infty} x_k = S$ jos ja vain jos seuraavat ehdot pätevät:

- Aina kun $S' > S$, niin $x_k < S'$ kaikilla kyllin suurilla k .
- Aina kun $S' < S$, niin $x_k > S'$ äärettömän monella k .

7.6 Esimerkki. Olkoon $x_k = (-1)^k$, kun $k \geq 1$. Jono $(x_k) = (-1, 1, -1, 1, \dots)$ ei suppene, mutta $\limsup_{k \rightarrow \infty} x_k = 1$.

7.7 Lause (Hadamardin lause). *Potenssisarjan* $\sum_k a_k(z - z_0)^k$ *suppenemissäde* R *saadaan aina kaavasta*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k}.$$

Todistus. Oletetaan, että $z_0 = 0$, ja merkitään $S = \limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k}$.

Oletetaan, että pisteelle $z \in \mathbb{C}$ pätee $|z| < 1/S$. Tällöin on olemassa S' siten, että $S < S' < 1/|z|$. Näin ollen yo. i-ehdon nojalla $|a_k|^{1/k} < S'$ kaikilla $k \geq n_0$, jossa n_0 on kyllin suuri. Tällöin voimme arvioida

$$|a_k z^k| \leq (S')^k |z^k| = (S'|z|)^k$$

kaikilla $k \geq n_0$. Koska $S'|z| < 1$, sarjalla $\sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k z^k|$ on siis suppeneva geometrinen sarja majoranttina, joten se itsekin suppenee. Siten suppenemissäteelle pätee $R \geq |z|$. Koska $|z|$ voidaan valita mielivaltaisen läheltä lukua $1/S$, päättelemme, että $R \geq 1/S$ eli $1/R \leq S$.

Oletetaan sitten, että pisteelle $z \in \mathbb{C}$ pätee $|z| < R$. Tällöin sarja $\sum_k a_k z^k$ suppenee, joten erityisesti $|a_k z^k| \leq 1$ suurilla k . Tästä seuraa, että $|a_k|^{1/k} \leq 1/|z|$ suurilla k , joten myös $S \leq 1/|z|$. Koska $|z|$ voidaan valita mielivaltaisen läheltä lukua R , tästä seuraa, että $S \leq 1/R$. \square

7.8 Esimerkki. a) Tarkastellaan potenssisarjaa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \dots$$

Nyt siis $a_k = 1/k$, kun $k \geq 1$, ja $a_0 = 0$. Suppenemissäde voidaan laskea helposti suhdetestillä: $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|/|a_{k+1}| = \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1)/k = 1$. Samaan tulokseen päädytään tietysti myös juuritestillä, sillä $1/\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} k^{1/k} = 1$. Suppenemiskiekkko on siis yksikkökiekkko $D(0, 1)$. Jos $z = 1$, kyseessä on harmoninen sarja, joka hajaantuu; jos taas $z = -1$, kyseessä on vuorotteleva sarja, joka suppenee Leibnizin lauseen nojalla. (Entä muut yksikköympyrän pisteet z ?)

b) Tarkastellaan sitten sarjaa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k^2}}{k^2} = z + \frac{z^4}{4} + \frac{z^9}{9} + \frac{z^{16}}{16} + \dots$$

Tämä on ymmärrettävä potenssisarjana $\sum_j a_j z^j$, jossa $a_j = 1/j$, kun $j = k^2$ jollekin kokonaisluvulle $k \geq 1$, ja muuten $a_j = 0$. Suhde- ja juuritestin raja-arvot eivät nyt ole olemassa. Voidaan kuitenkin laskea

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} |a_j|^{1/j} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(k^2)^{1/k^2}} = 1,$$

joten Hadamardin lauseen mukaan suppenemissäde on $1/1 = 1$. (Huomaa, että jono (a_j) jakautuu kahteen suppenevaan osajonoon: toinen on $(1/k^2)$ ja toinen nollista koostuva vakiojono.)

Potenssisarjan summan analyttisyys

Seuraava lause on tärkeä. Se kertoo, että suppeneva potenssisarja määrittelee suppenemiskiekossaan analyttisen funktion.

7.9 Lause. Oletetaan, että sarjan $\sum_k a_k(z - z_0)^k$ suppenemissäde on $R > 0$, ja olkoon sarjan summa

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k, \quad z \in D(z_0, R).$$

Tällöin f on analyyttinen kiekossa $D(z_0, R)$ ja f' voidaan laskea termeittäin derivoimalla:

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k(z - z_0)^{k-1}, \quad z \in D(z_0, R).$$

Tämän derivoimalla saadun sarjan suppenemissäde on myös R .

Todistus. Voidaan olettaa, että $z_0 = 0$. Olkoon R' sarjan $\sum_k k a_k z^{k-1}$ suppenemissäde. Osoitetaan aluksi, että $R' = R$. Oletetaan, että $|z| < R$. Tällöin voidaan valita z_1 siten, että $|z| < |z_1| < R$. Kun $k \geq 1$, kirjoitetaan

$$|k a_k z^{k-1}| = |a_k z_1^k| \cdot \left[\frac{k}{|z|} \left(\frac{|z|}{|z_1|} \right)^k \right].$$

Koska $|z|/|z_1| < 1$, hakasulkeissa oleva lauseke lähestyy nollaa, kun $k \rightarrow \infty$. Siten kyseinen jono on rajoitettu. Koska sarja $\sum_k a_k z_1^k$ suppenee itseisesti, majoranttiperiaatteen avulla näemme nyt, että myös sarja $\sum_k k a_k z^{k-1}$ suppenee itseisesti. Siispä $R' \geq |z|$. Näin ollen $R' \geq R$. Kääntäen pätee kaikilla z ja $k \geq 1$ arvio

$$|a_k z^k| = |z| \cdot |a_k z^{k-1}| \leq |z| \cdot |k a_k z^{k-1}|.$$

Tästä voimme päätellä, että aina kun $\sum_k k a_k z^{k-1}$ suppenee itseisesti, niin tekee myös $\sum_k a_k z^k$. Näin ollen $R \geq R'$.

Merkitään

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad g_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k,$$

ja

$$d(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}, \quad d_n(z) = \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1}.$$

Kiinnitetään $z \in D(0, R)$. Koska $f = f_n + g_n$, voimme kirjoittaa, kun $w \neq z$,

$$\begin{aligned} & \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - d(z) \\ &= \left[\frac{f_n(w) - f_n(z)}{w - z} - d_n(z) \right] - [d(z) - d_n(z)] + \left[\frac{g_n(w) - g_n(z)}{w - z} \right] \\ &= A_n(w) - B_n + C_n(w). \end{aligned}$$

Väite seuraa (pisteelle z), kunhan osoitamme, että tämä lauseke lähestyy nollaa, kun $w \rightarrow z$.

Olkoon $\epsilon > 0$. Merkitään $\delta_0 = (R - |z|)/2 > 0$ ja $r = |z| + \delta_0 < R$. Oletamme jatkossa koko ajan, että $w \in D(z, \delta_0)$. Tällöin kolmioepäyhtälöstä seuraa (tai piirrä

kuval), että $|w| < r$. Selvästi myös $|z| < r$. Koska $d_n(z) \rightarrow d(z)$, kun $n \rightarrow \infty$, voimme valita luvun $n_1 \geq 1$ siten, että $|B_n| < \epsilon/3$, kun $n \geq n_1$. Tutkitaan lauseketta C_n :

$$C_n(w) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \frac{w^k - z^k}{w - z}.$$

Käytämme tässä seuraavaa identiteettiä, jonka todistus on harjoitustehtävä:

$$w^k - z^k = (w - z) \sum_{j=0}^{k-1} w^j z^{k-1-j}.$$

Siispä voimme arvioida

$$\left| \frac{w^k - z^k}{w - z} \right| \leq \sum_{j=0}^{k-1} |w|^j |z|^{k-1-j} \leq kr^{k-1}$$

ja edelleen

$$|C_n(w)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k |a_k| r^{k-1}.$$

Koska kyseessä on suppenevan sarjan jäännöstermi (huomaa, että $r < R$), on olemassa luku $n_2 \geq 1$ siten, että $|C_n(w)| < \epsilon/3$, kun $n \geq n_2$. Huomaa, että tämä arvio pätee tasaisesti kaikille $w \in D(z, \delta)$.

Olkoon $n = \max\{n_1, n_2\}$. Nyt siis sekä $|B_n| < \epsilon/3$ että $|C_n(w)| < \epsilon/3$. Koska $f'_n(z) = d_n(z)$ summan derivointisäännön perusteella, pätee $A_n(w) \rightarrow 0$, kun $w \rightarrow z$. On siis olemassa $\delta \in (0, \delta_0)$ siten, että $A_n(w) < \epsilon/3$ kaikilla $w \in D(z, \delta)$. Yhdistämällä nämä arviot ja käyttämällä kolmioepäyhtälöä näemme lopulta, että

$$\left| \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - d(z) \right| \leq |A_n(w)| + |B_n| + |C_n(w)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,$$

kun $w \in D(z, \delta)$. Olemme todistaneet, että $f'(z) = d(z)$. □

Soveltamalla edellistä lausetta induktiivisesti saamme seuraavan tuloksen:

7.10 Seuraus. *Olkoon funktio f kuten edellisessä lauseessa:*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad z \in D(z_0, R),$$

jossa suppenemissäde $R > 0$ (mahdollisesti $R = \infty$). Tällöin f :llä on kiekossa $D(z_0, R)$ kaikkien kertalukujen derivaatat, jotka voidaan laskea termeittäin derivoimalla:

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-n+1) a_k (z - z_0)^{k-n}.$$

Erityisesti $f^{(n)}(z_0) = n! a_n$.

Myöhemmin Cauchyn integraalikaavan seurauksena tulemme todistamaan lauseelle 7.9 käänteisen tuloksen: analyyttinen funktio on aina esitettävissä (ainakin lokaalisti) suppenevan potenssisarjan summana.

8 Kompleksinen integrointi

Vektorianalyysin kurssilta muistamme, että on olemassa useita tapoja integroida tason funktioita: on sekä pintaintegraalit että integroinnit polkuja pitkin. Periaatteessa analyyttisiin funktioihin voisi soveltaa molempia menetelmiä, mutta käytännössä on osoittautunut, että vain jälkimmäiset tuovat todella uusia piirteitä ja tehokkaita menetelmiä analyyttisten funktioiden teoriaan. Siksi tällä kurssilla käsittelemme vain integrointia polkujen yli.

Aloitamme määrittelemällä jatkuvan funktion integraalin kompleksitason jatkuvasti derivoituvan polun yli. Riippuen siitä, otammeko huomioon polun kulloisenkin suunnan vai emme, saamme kaksi vaihtoehtoista integraalin käsitettä: polkuintegraalin ja integraalin kaarenpituuden suhteen. Molemmat ovat luonnollisia yleistyksiä tavallisesta Riemann-integraalista. Kun olemme tutkineet niiden perusominaisuuksia, todistamme kurssin ehkä tärkeimman tuloksen, Cauchyn integraalilauseen – aluksi tosin vain umpinaisille poluille kiekkoissa. Lause sanoo, että analyttisen funktion integraali yli jokaisen umpinaisen polun häviää. Lähes välitön seuraus tästä on Cauchyn integraalikaava, joka kertoo analyttisen funktion arvot kiekon sisäpisteissä sen reunarvojen avulla. Seuraavassa luvussa todistamme tämän avulla muutamia merkittäviä analyttisten funktioiden ominaisuuksia.

Polkuintegraali

Jos $f = u + iv$ on jatkuva kompleksiarvoinen funktio, joka on määritelty suljetulla reaaliakselin välillä $[a, b]$, on luonnollista asettaa

$$(8.1) \quad \int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt.$$

Tarkastellaan sitten kompleksitason polkujen yli laskettavia integraaleja. (Lukijan on tässä vaiheessa hyvä palauttaa mieleen polun määritelmä ja muita polkuihin liittyviä käsitteitä luvun 2 lopusta ja luvun 5 alusta.)

8.2 Määritelmä. Olkoon $\gamma: [a, b] \rightarrow A$ jatkuvasti derivoituva (eli lyhyesti C^1) polku joukossa $A \subset \mathbb{C}$. Jos $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ on jatkuva, niin f :n *integraali yli polun* γ on

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt.$$

Koska integroitava lauseke on oletettu jatkuvaksi, integraali on hyvin määritelty esimerkiksi Riemann-integraalina. Verrattuna kaavaan (8.1) ideana on siis käyttää f :n

arvoja polun γ pisteissä $\gamma(t)$ ja korvata reaaliakselin suuntainen ”infinitesimaalinen lisäys” dt polun γ suuntaisella ”infinitesimaalisella lisäyksellä” $d\gamma(t) = \gamma'(t) dt$. Integraalin merkinnässä tähän viittaa siis ”kompleksinen differentiaalelementti” dz .

Selvästikin määrittelemämme polkuintegraali on *lineaarinen* integroitavan funktion suhteen: jos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ja f, g ovat jatkuvia, niin

$$\int_{\gamma} (\alpha f + \beta g) dz = \alpha \int_{\gamma} f dz + \beta \int_{\gamma} g dz.$$

Integraalin $\int_{\gamma} f dz$ arvo ei muutu, jos polku γ *uudelleenparametroidaan* siten, että sen suunnistus säilyy. Olkoon nimittäin γ kuten määritelmässä edellä ja $\eta: [c, d] \rightarrow [a, b]$ jokin aidosti kasvava jatkuvasti derivoituva bijektio. Tällöin uudelleenparametroidulla polulla $\gamma \circ \eta$ on sama alkupiste ja sama loppupiste kuin γ :lla, koska $\eta(c) = a$ ja $\eta(d) = b$. Tekemällä integraalissa muuttujanvaihto $t = \eta(s)$ saamme

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_c^d f(\gamma(\eta(s))) \gamma'(\eta(s)) \eta'(s) ds = \int_{\gamma \circ \eta} f dz, \end{aligned}$$

sillä ketjusäännön nojalla $(\gamma \circ \eta)'(s) = \gamma'(\eta(s)) \eta'(s)$. Voimme siis halutessamme käyttää parametrivälinä esimerkiksi standardiväliä $I = [0, 1]$ (yksikköväli); tähän päästään uudelleenparametroidulla $\eta(s) = a + s(b - a)$ ($s \in I$).

8.3 Huomautus. Edellisen havainnon johdosta saatamme puhua jatkossa esimerkiksi sellaisista polkuintegraaleista kuin

$$\int_{z_1}^{z_2} f dz = \int_{[z_1, z_2]} f dz \quad \text{ja} \quad \int_{\partial D(z_0, r)} f dz,$$

jossa $[z_1, z_2]$ on jana pisteestä $z_1 \in \mathbb{C}$ pisteeseen $z_2 \in \mathbb{C}$ ja $\partial D(z_0, r)$ on z_0 -keskisen ja r -säteisen ympyrän kehä suunnistettuna positiivisesti (eli vastapäivään). Merkinnässä ei siis oteta kantaa parametrintiin. Suunnanmukainen C^1 -parametrinti voidaan tehdä monella tavalla; esimerkiksi $\gamma(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$ ($t \in I$) janalle ja $\gamma(t) = z_0 + re^{2\pi it}$ ($t \in I$) ympyrälle.

Polun *suunnistuksen kääntäminen* muuttaa polkuintegraalin arvon vastaluvukseen. Jos esimerkiksi $\gamma: I \rightarrow A$ on C^1 polku, voimme määritellä sen *vastapolun*

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(1 - t), \quad t \in I.$$

(Huomaa, että merkinnästä huolimatta tässä ei ole kysymys käänteisfunktioista!) Tässä siis γ ja γ^{-1} määrittelevät saman käyrän tasossa mutta alkupiste ja loppupiste vaihtuvat keskenään. Tällöin käyttämällä muuttujanvaihtoa $s = 1 - t$, jossa $ds = -dt$, saamme

$$\begin{aligned} \int_{\gamma^{-1}} f dz &= \int_0^1 f(\gamma(1 - t)) (-\gamma'(1 - t)) dt \\ &= \int_1^0 f(\gamma(s)) \gamma'(s) ds = - \int_{\gamma} f dz. \end{aligned}$$

Viimeinen etumerkin vaihtuminen seurasi siitä, että vaihdoimme muuttujanvaihdosta tulleet integroimisrajat 1 ja 0 takaisin normaaliin järjestykseen.

8.4 Esimerkki. a) Olkoon $\gamma(t) = t$, kun $0 \leq t \leq 1$. Tällöin $\gamma'(t) = 1$, joten

$$\int_{\gamma} f dz = \int_0^1 f(t) dt.$$

Siis \mathbb{R} :n välin yli otettu polkuintegraali on tavallinen Riemann-integraali.

b) Olkoon γ positiivisesti suunnistetun yksikköympyrän kehän parametrisointi $\gamma(t) = e^{2\pi it}$, jossa $0 \leq t \leq 1$. Tällöin $\gamma'(t) = 2\pi i e^{2\pi it}$. Olkoon n kokonaisluku. Nyt

$$\int_{\gamma} z^n dz = \int_0^1 (e^{2\pi it})^n 2\pi i e^{2\pi it} dt = 2\pi i \int_0^1 e^{2(n+1)\pi it} dt = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases}$$

Tulemme myöhemmin näkemään, miksi tässä arvo $n = -1$ eli funktio $1/z$ on erikois-asemassa.

c) Olkoon γ kuten edellisessä kohdassa, ja valitaan integroitavaksi funktio \bar{z} . Koska $\overline{\gamma(t)} = e^{-2\pi it} = 1/\gamma(t)$, saamme itse asiassa saman tuloksen kuin edellä arvolla $n = -1$:

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz = 2\pi i \int_0^1 dt = 2\pi i.$$

Huomaa, että \bar{z} :n integraali yli yksikköympyrän eroaa ratkaisevasti vastaavasta z :n integraalista, joka oli 0.

Polkuintegraalin käsite voidaan helposti ulottaa sellaisiin polkuihin, jotka ovat jatkuvasti derivoituvia äärellistä pistejoukkoa lukuunottamatta.

8.5 Määritelmä. Polku $\gamma: [a, b] \rightarrow A$, jossa $A \subset \mathbb{C}$, on *paloittain* C^1 , jos voidaan kirjoittaa

$$[a, b] = [a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_{n-1}, a_n],$$

jossa $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$, ja rajoittumat $\gamma_k = \gamma|_{[a_{k-1}, a_k]}$ ($k = 1, \dots, n$) ovat kaikki C^1 -funktioita. Tällöin polkuintegraali yli γ :n on

$$\int_{\gamma} f dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f dz.$$

Tässä määritelmässä siis γ on jatkuva pisteissä a_k ja toispuoliset derivaatat $\gamma'(a_k-)$ sekä $\gamma'(a_k+)$ ovat olemassa mutta ne voivat olla erisuuret. Tämän yleistyksen jälkeen voimme puhua esimerkiksi polkuintegraaleista, jotka on otettu jonkin murtoviivan kuten vaikkapa monikulmion (suunnistetun) reunan yli.

Saman idean mukaisesti voimme ottaa käyttöön myös polkujen tulon käsitteen. Jos $\gamma_1: [a, b] \rightarrow A$ ja $\gamma_2: [c, d] \rightarrow A$ ovat (paloittain) C^1 polkuja siten, että γ_1 :n loppupiste on sama kuin γ_2 :n alkupiste eli $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, niin näiden *tulo* on polku $\gamma_1 * \gamma_2: [a, b + (d - c)] \rightarrow A$,

$$(\gamma_1 * \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & a \leq t \leq b, \\ \gamma_2(c - b + t), & b \leq t \leq b + (d - c). \end{cases}$$

Tämä on paloittain C^1 polku, joka yhdistää pisteen $\gamma_1(a)$ pisteeseen $\gamma_2(d)$. Polku-integraali tulopolun yli on selvästikin additiivinen:

$$\int_{\gamma_1 * \gamma_2} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz.$$

Yleisemmin voimme tietysti määritellä useamman polun tulon $\gamma_1 * \dots * \gamma_n$. Itse asiassa yllä määritelmässä 8.5 oli tilanne, jossa $\gamma = \gamma_1 * \dots * \gamma_n$.

Integraali kaarenpituuden suhteen

Tason polun yli voidaan määritellä myös toinen luonnollinen integraali.

8.6 Määritelmä. Olkoon $\gamma: [a, b] \rightarrow A$ jokin C^1 polku joukossa $A \subset \mathbb{C}$. Jos $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ on jatkuva funktio, niin f :n *integraali γ :n kaarenpituuden suhteen* on

$$\int_{\gamma} f |dz| = \int_{\gamma} f(z) |dz| = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

Tässä siis ”kompleksisen lisäyksen” $dz = d\gamma(t)$ (määritelmä 8.2) sijasta käytetään ”pituuselementtiä” $|dz| = |d\gamma(t)| = |\gamma'(t)| dt$, joka ottaa huomioon pisteen $\gamma(t)$ modulin muutoksen pitkin kyseistä polkua. Tapauksessa, jossa $f \geq 0$, voidaan havainnollisesti tulkita, että integraalin $\int_{\gamma} f |dz|$ arvo on sellaisen polkua γ pitkin kulkevan aidan pinta-ala, jonka korkeus pisteessä $\gamma(t)$ on $f(\gamma(t))$. Eryityisesti valitsemalla $f \equiv 1$ saadaan

$$(8.7) \quad \int_{\gamma} |dz| = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \gamma\text{:n pituus.}$$

Myös kaarenpituuden suhteen laskettu integraali on lineaarinen integroitavan f suhteen, ja määritelmä voidaan laajentaa paloittain C^1 poluille samoin kuin tehtiin määritelmässä 8.5. Erona tavalliseen polkuintegraaliin on kuitenkin se, että kaarenpituuden suhteen lasketun integraalin arvo ei muutu, jos polun suunnistus käännetään vastakkaiseksi (totea tämä harjoitustehtävänä).

8.8 Esimerkki. Olkoon f jatkuva funktio yksikköympyrällä $\partial D(0, 1)$. Tällöin

$$\int_{\partial D(0,1)} f(z) |dz| = 2\pi \int_0^1 f(e^{2\pi it}) dt = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) dt.$$

Keskimmäinen integraali vastaa yksikköympyrän parametrisointia $\gamma_1(t) = e^{2\pi it}$ ($0 \leq t \leq 1$), jolle $\gamma_1'(t) = 2\pi i e^{2\pi it}$ ja viimeinen parametrisointia $\gamma_2(t) = e^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$). Jälkimmäinen parametrisointi on *pituustarkka* siinä mielessä, että aina kun $0 \leq a < b \leq 2\pi$, niin rajoittuman (eli osapolun) $\gamma_2|[a, b]$ pituus on sama kuin sitä vastaavan parametrivälin eli $b - a$.

Integraali kaarenpituuden suhteen ei ole funktioteoriassa ollenkaan niin tärkeä kuin aikaisemmin määritelty kompleksinen polkuintegraali. Lähinnä se tulee käyttöön arvioitaessa polkuintegraalin suuruutta. Perusperiaatteena tässä on seuraava tulos, jonka todistus on harjoitustehtävänä.

8.9 Apulause. Jos γ on paloittain C^1 polku ja f on γ :n pisteissä jatkuva kompleksiarvoinen funktio, jolle $|f| \leq M$ kaikissa γ :n pisteissä, niin

$$\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq \int_{\gamma} |f| |dz| \leq M \cdot \gamma\text{:n pituus}.$$

Integraalifunktio

Ryhdyimme nyt tutkimaan tarkemmin analyyttisyyden ja integroinnin suhdetta.

8.10 Määritelmä. Jos $A \subset \mathbb{C}$ on avoin ja $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, niin analyyttinen funktio $F: A \rightarrow \mathbb{C}$ on f :n *integraalifunktio*, mikäli

$$F'(z) = f(z) \quad \text{kaikilla } z \in A.$$

8.11 Esimerkki. Kun $n \neq -1$ on kokonaisluku, niin funktiolla z^n on integraalifunktio $z^{n+1}/(n+1)$ koko \mathbb{C} :ssä (jos $n \geq 0$) tai alueessa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (jos $n \leq -2$). Tapausta $n = -1$ tarkastelemme kohta.

Jos integraalifunktio on olemassa, polkuintegraalien laskeminen käy varsin helpoksi. Erityisesti polkuintegraalin arvo riippuu vain polun päätepisteistä!

8.12 Apulause. Oletetaan, että jatkuvalla funktiolla $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ on integraalifunktio F . Silloin

$$\int_{\gamma} f dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

jokaisella paloittain C^1 polulla $\gamma: [a, b] \rightarrow A$.

Todistus. Oletetaan aluksi, että γ on jatkuvasti derivoituva eli C^1 . Koska $F' = f$, niin ketjusäännön nojalla $(F \circ \gamma)'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$, joten analyyttisen peruslauseen mukaan (viime kädessä sovellettuna erikseen integroitavan reaali- ja imaginaariosaan)

$$\int_{\gamma} f dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Jos γ on vain paloittain C^1 , pilkomme sen C^1 osapolkujen tuloksi $\gamma_1 * \dots * \gamma_n$ kuten määritelmässä 8.5. Soveltamalla todistuksen alkuosaa kuhunkin näistä saamme

$$\int_{\gamma} f dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f dz = \sum_{k=1}^n [F(\gamma(a_k)) - F(\gamma(a_{k-1}))] = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

□

Tästä saadaan helposti seuraava yksikäsitteisyystulos *alueessa* määritellyille analyyttisille funktioille. (Tämän voisi päätellä myös aikaisemmin esillä olleesta lauseesta 3.13.)

8.13 Seuraus. Olkoon $A \subset \mathbb{C}$ alue.

- Analyyttinen funktio $F: A \rightarrow \mathbb{C}$ on vakio jos ja vain jos $F' = 0$ A :ssa.
- Jos F ja G ovat kumpikin funktion f integraalifunktioita A :ssa, niin $F - G$ on vakio.

Todistus. a) Selvästikin vakiofunktion derivaatta on identtisesti nolla. Oletetaan siten, että $F' = 0$ A :ssa, ja osoitetaan, että F on vakio. Olkoot $z, w \in A$ mielivaltaisia pisteitä. Palautetaan mieleen lauseesta 2.21, että koska A on avoin ja yhtenäinen, z voidaan yhdistää w :hen murtoviivalla A :ssa. Murtoviiva on selvästikin parametroitavissa paloittain C^1 polulla (itse asiassa tulona janapoluista) γ . Äskeisen apulauseen nojalla on siten $F(w) - F(z) = \int_{\gamma} 0 dz = 0$. Koska z ja w olivat mielivaltaisia, päättelemme, että F on vakio.

b) Sovelletaan äskeitä päättelyä erotukseen $F-G$, jolle $(F-G)' = F'-G' = 0$. \square

Tässä vaiheessa herää kysymys: Millaisilla funktioilla ylipäätään on integraalifunktio annetussa kompleksitason alueessa? Onko analyyttisellä funktiolla aina integraalifunktio määrittelyjoukossaan? Onko esimerkiksi funktiolla $1/z$ integraalifunktio punkteeratussa tasossa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$?

Aloitamme tämän tärkeän asian tutkimisen toteamalla, että integraalifunktion olemassaolo voidaan luonnehtia funktion polkuintegraalien avulla. Palautetaan tässä mieleen, että polku $\gamma: [a, b] \rightarrow A$ on *umpinainen*, mikäli sen alku- ja loppupiste yhtyvät eli $\gamma(a) = \gamma(b)$.

8.14 Lause. *Olkoon $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ jatkuva alueessa $A \subset \mathbb{C}$. Tällöin f :llä on integraalifunktio A :ssa jos ja vain jos jokaisella umpinaisella paloittain C^1 polulla γ alueessa A pätee $\int_{\gamma} f dz = 0$.*

Todistus. Ehdon välttämättömyys on jo oikeastaan todistettu apulauseessa 8.12: jos integraalifunktio on olemassa ja polku γ on umpinainen, niin selvästi $\int_{\gamma} f dz = 0$.

Oletetaan sitten, että f :n integraali yli jokaisen umpinaisen paloittain C^1 polun häviää. Haluamme osoittaa, että integraalifunktio on olemassa. Olkoon $z_0 \in A$ jokin kiinteä piste. Jos $z \in A$, yhtenäisyydestä seuraa (kuten yllä seurauslauseen 8.13 todistuksessa), että on olemassa paloittain C^1 polku γ_z alueessa A , jonka alkupiste on z_0 ja loppupiste z . Jos γ on jokin toinen tällainen polku z_0 :sta z :aan, niin $\gamma^{-1} * \gamma_z$ on paloittain C^1 umpinainen polku ja siten oletuksen mukaan

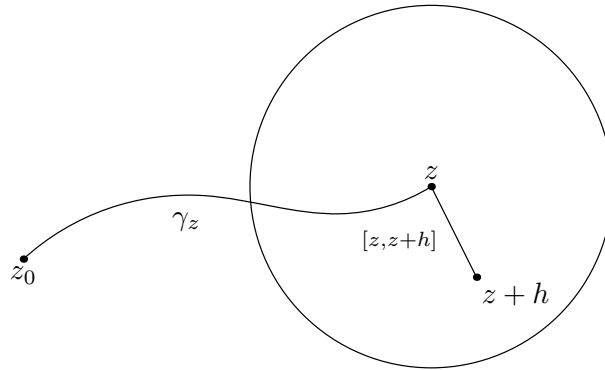
$$0 = \int_{\gamma^{-1} * \gamma_z} f d\zeta = - \int_{\gamma} f d\zeta + \int_{\gamma_z} f d\zeta.$$

(Merkitsimme tässä ”integraoimismuuttujaa” ζ :lla, koska symboli z oli jo käytetty muuhun tarkoitukseen.) Toisin sanoen, jos määrittelemme

$$(8.15) \quad F(z) = \int_{\gamma_z} f d\zeta,$$

niin luku $F(z)$ ei riipu polun γ_z valinnasta.

Osoitamme, että yhtälön (8.15) määrittelemä funktio $F: A \rightarrow \mathbb{C}$ on f :n integraalifunktio. Olkoon $z \in A$ mielivaltainen, ja valitaan $r > 0$ siten, että $D(z, r) \subset A$. Kun $0 < |h| < r$, olkoon γ_{z+h} tulopolku $\gamma_z * [z, z+h]$, jossa jälkimmäisellä tekijällä tarkoitamme janapolkua z :sta pisteeseen $z+h$ (ks. kuva alla).



Toisin sanoen γ_{z+h} on polku z_0 :sta pisteeseen $z+h$, joka saadaan kulkemalla ensin polkua γ_z pitkin pisteeseen z ja jatkamalla tästä yhdysjanaa $[z, z+h]$ pitkin pisteeseen $z+h$. Käyttämällä integraalin additiivisuutta polun suhteen ja kaavan (8.15) riippumattomuutta polusta saamme nyt

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\gamma_{z^*[z, z+h]}} f d\zeta - \int_{\gamma_z} f d\zeta = \int_{[z, z+h]} f d\zeta.$$

Siten

$$\begin{aligned} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) &= \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f d\zeta - f(z) \\ &= \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta. \end{aligned}$$

Koska janan $[z, z+h]$ pituus on $|h|$, saamme apulauseen 8.9 nojalla tästä arvion

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| \leq \sup\{|f(\zeta) - f(z)| : \zeta \in [z, z+h]\}.$$

Mutta tämä $\rightarrow 0$, kun $h \rightarrow 0$, sillä f on jatkuva z :ssa. Siispä $F'(z) = f(z)$. \square

Edellisellä lauseella on mielenkiintoinen seuraus, joka on jatkoa esimerkkiin 8.4b.

8.16 Seuraus. a) Funktiolla $f(z) = 1/z$ ei ole integraalifunktiota alueessa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

b) Logaritmillä ei ole haaraa alueessa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Todistus. a) Esimerkissä 8.4b laskettiin, että funktion f integraali yli positiivisesti suunnistetun yksikköympyrän kehän on

$$\int_{\partial D(0,1)} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0.$$

Siten edellisen lauseen nojalla f :llä ei ole integraalifunktiota.

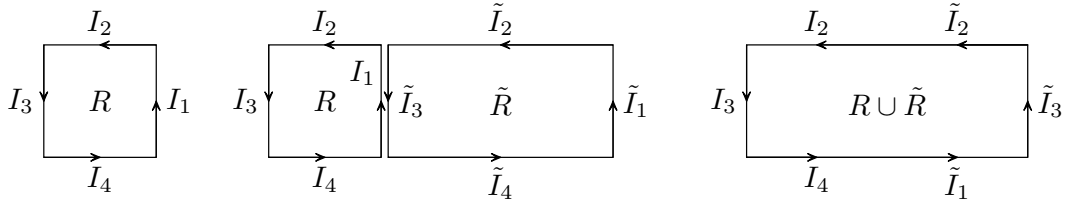
b) Jos logaritmillä olisi haara g alueessa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, kyseessä olisi jatkuva funktio, jolle $e^{g(z)} = z$ kaikilla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (ks. määritelmä 3.17). Mutta tällöin käänteisfunktion derivointisäännön 3.18 mukaan pätsi $g'(z) = 1/z$ kaikilla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eli g olisi integraalifunktio f :lle, mikä on ristiriita. \square

Muista kuitenkin, että esimerkiksi aukileikatussa tasossa $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ logaritmillä on haara ja samalla tämä on integraalifunktio funktiolle $1/z$ kyseisessä alueessa (ks. lause 4.8)!

Goursat'n lemma

Tavoitteenamme on todistaa, että analyttinen funktio toteuttaa lauseen 8.14 kriteerin tietyn ehdoin (tietynlaisissa alueissa). Tästä kertoo Cauchyn integraalilause. Tässä jaksossa todistamme sen erään erikoistapauksen, Goursat'n lemmän.

Lähtökohtana ja ideana meillä on seuraava ilmiö: Olkoon R jokin suorakulmio, jonka reuna ∂R on positiivisesti (eli vastapäivään) suunnistettu. Silloin ∂R on neljän suunnistetun janan yhdiste, eli aikaisempia merkintöjä soveltaen voisimme kirjoittaa $\partial R = I_1 * I_2 * I_3 * I_4$ (ks. vasemmanpuoleinen kuva alla). Olkoon sitten \tilde{R} toinen suorakulmio, jonka reuna niin ikään suunnistetaan positiivisesti ja jolla on yksi yhteinen sivu R :n kanssa (keskimmäinen kuva). Joukkoina tietysti $I_1 = \tilde{I}_3$, mutta jos valitsemme sopivat *suunnanmukaiset* parametrisitykset, niin kyseessä ovat toistensa vastapolut.



Siten kuvan merkinnöin pätee $\int_{I_1} f dz = -\int_{\tilde{I}_3} f dz$, parametrisoinneista riippumatta. Käyttämällä polkuintegraalin additiivisuutta integroimispolun suhteen näemme siis, että

$$\int_{\partial R} f dz + \int_{\partial \tilde{R}} f dz = \int_{\partial(R \cup \tilde{R})} f dz$$

(vrt. oikeanpuoleinen kuva). Huomaa myös, että reunapolkujen parametrintien rooli on nyt kutistunut lähes näkymättömiin; integraalit voidaan ymmärtää lasketuiksi suunnistettujen reunakäyrien yli.

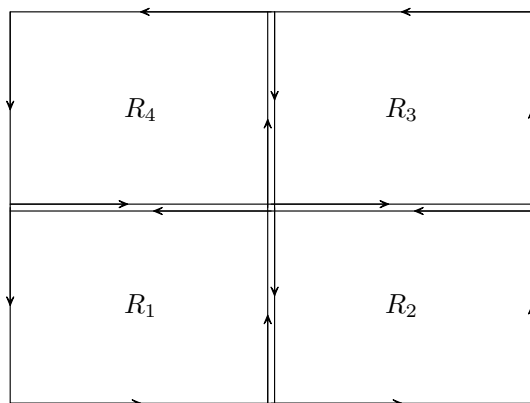
On tietysti selvää, että samanlainen päättely voidaan tehdä monille muillekin käyrille. Tällaisten kumoutumisilmiöiden käyttö onkin erittäin tehokas työkalu polku-integraalien yhteydessä, ja sitä hyödynnetään funktioteoriassa paljon.

8.17 Apulause (Goursat'n lemma). *Olkoon $R \subset \mathbb{C}$ suljettu suorakulmio ("sisusta" mukaanlukien), jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaisia. Oletetaan, että f on analyttinen R :n ympäristössä. Jos ∂R on R :n positiivisesti suunnistettu reuna, niin $\int_{\partial R} f dz = 0$.*

Todistus. Olkoon $I = \int_{\partial R} f dz$, ja olkoon lisäksi L reunakäyrän ∂R kokonaispituus. Jaetaan R neljään yhtenevään suorakulmioon R_j , $j = 1, \dots, 4$, puolittamalla se vaakasuoraan ja pystysuoraan. Suunnistetaan reunat ∂R_j positiivisesti. Päättelämälä kuten edellä selostimme eli käyttämällä hyväksi sitä, että polun suunnistuksen vaihtaminen muuttaa integraalin merkin, näemme että

$$I = \int_{\partial R} f dz = \int_{\partial R_1} f dz + \int_{\partial R_2} f dz + \int_{\partial R_3} f dz + \int_{\partial R_4} f dz$$

(ks. kuva alla).



Kolmioepäyhtälön nojalla jollekin näistä neljästä pikkusuorakulmiosta R_j on voimassa

$$|I| \leq 4 \left| \int_{\partial R_j} f dz \right|.$$

Merkitään tätä suorakulmiota $R^{(1)}$:llä ja olkoon $I_1 = \int_{\partial R^{(1)}} f dz$.

Soveltamalla tehtyä päättelyä R :n sijasta $R^{(1)}$:een löydämme samoin $R^{(1)}$:n osasuorakulmion $R^{(2)}$, jolle

$$|I_1| \leq 4 \left| \int_{\partial R^{(2)}} f dz \right|.$$

Jatkamalla näin saamme jonon sisäkkäisiä, yhdenmuotoisia suljettuja suorakulmioita

$$R \supset R^{(1)} \supset R^{(2)} \supset R^{(3)} \supset \dots$$

siten, että jos

$$I_n = \int_{\partial R^{(n)}} f dz,$$

niin

$$(8.18) \quad |I| \leq 4|I_1| \leq \dots \leq 4^n |I_n| \leq 4^{n+1} |I_{n+1}| \leq \dots$$

Lisäksi suorakulmion $R^{(n)}$ reunan $\partial R^{(n)}$ pituus on $2^{-n}L$, sillä sivujen pituudet puolittuvat joka askelella.

Osoitamme seuraavaksi, että leikkaus $R^\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} R^{(n)}$ sisältää täsmälleen yhden pisteen. Koska joukon $R^{(n)}$ läpimitta on varmasti $\leq 2^{-n}L$, joka $\rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$, leikkaus R^∞ sisältää korkeintaan yhden pisteen. Valitaan nyt jokaisella $n \geq 1$ mielivaltainen $z_n \in R^{(n)}$. Koska $z_k \in R^{(n)}$, kun $k \geq n$, on (z_n) Cauchy-jono, joten sillä on raja-arvo $z^* = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$. Koska jokainen $R^{(n)}$ on suljettu, sisältyy z^* jokaiseen joukoista $R^{(n)}$ ja siten myös niiden leikkaukseen.

Olkoon nyt $\epsilon > 0$ mielivaltainen ja $\delta > 0$ niin pieni, että f on analyyttinen kiekossa $D(z^*, \delta)$ ja

$$(8.19) \quad |f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*)| \leq \epsilon |z - z^*|,$$

kun $|z - z^*| < \delta$. Tämä on mahdollista, sillä f on analyyttinen pisteessä z^* (ks. apulause 3.3). Olkoon n niin suuri, että $R^{(n)} \subset D(z^*, \delta)$. Koska vakiofunktiolla 1 on integraalifunktio z ja z :lla on integraalifunktio $z^2/2$, lauseen 8.14 nojalla niiden

integraalit yli reunan $\partial R^{(n)}$ häviävät. Siten epäyhtälön (8.19) ja apulauseen 8.9 avulla saamme

$$|I_n| = \left| \int_{\partial R^{(n)}} [f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*)] dz \right| \leq \epsilon \int_{\partial R^{(n)}} |z - z^*| |dz|.$$

Tässä $|z - z^*| \leq 2^{-n}L$ kaikilla $z \in \partial R^{(n)}$, joten saamme edelleen arvion

$$|I_n| \leq \epsilon \cdot 2^{-n}L \cdot 2^{-n}L = 4^{-n}L^2\epsilon.$$

Yhdistämällä tämän arvion epäyhtälöön (8.18) näemme, että $|I| \leq L^2\epsilon$. Koska ϵ oli mielivaltainen positiiviluku, on oltava $I = 0$. \square

Cauchyn integraalilause kiekossa

Todistamme nyt perusversion tämän kurssin tärkeimmästä tuloksesta, Cauchyn integraalilauseesta.

8.20 Lause (Cauchyn integraalilause). *Oletetaan, että funktio f on analyyttinen kiekossa $D = D(z_0, R)$. Tällöin*

$$\int_{\gamma} f dz = 0$$

jokaisella umpinaisella paloittain C^1 polulla γ kiekossa D .

Todistus. Lauseen 8.14 perusteella riittää yhtä hyvin näyttää, että f :llä on integraalifunktio D :ssä. Konstruoimme sen samalla idealla kuin tuon lauseen todistuksessa mutta käyttäen koordinaattiakselien suuntaisista janoista muodostettuja polkuja.

Kun $z = x + iy \in D$ on mielivaltainen piste, yhdistetään kiekon keskipiste $z_0 = x_0 + iy_0$ tähän pisteeseen z sellaisella polulla γ_z , joka saadaan kulkemalla ensin z_0 :sta vaakasuoraan pisteeseen $x + iy_0$ ja sitten pystysuoraan pisteeseen z . Polku γ_z on siis tulo kahdesta janapolusta. Huomaa erityisesti, että kiekon geometriasta seuraa, että polku γ_z pysyy aina kiekossa D (varmistu asiasta piirtämällä kuva). Määrittelemme

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta.$$

Näin saamme funktion $F: D \rightarrow \mathbb{C}$. Osoitamme, että F on analyyttinen, toteamalla, että Cauchyn ja Riemannin yhtälöt ovat sille voimassa D :ssä (ks. lause 3.10). Päätteley tulee myös osoittamaan, että $F' = f$. Kirjoitetaan $f = u + iv$ ja $F = U + iV$.

Olkoon $z \in D$. Tarkastellaan ensin osittaisderivaattoja y :n suhteen. Jos $h \neq 0$ on reaalinen ja $|h|$ kyllin pieni, niin voimme kirjoittaa

$$\frac{F(z + ih) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_z^{z+ih} f(\zeta) d\zeta = \frac{i}{h} \int_0^h f(z + it) dt.$$

Tässä \int_z^{z+ih} tarkoittaa polkuintegraalia pitkin janaa pisteestä z pisteeseen $z + ih$, jolle käytimme viimeisessä integraalissa parametriesitystä $t \mapsto z + it$. (Selvitä itsellesi

tämä erotusosamäärän esitys; piirrä samaan kuvaan polut γ_z ja γ_{z+ih} .) Koska f on jatkuva pisteessä z , näemme, että

$$\lim_{\mathbb{R} \ni h \rightarrow 0} \frac{F(z+ih) - F(z)}{h} = if(z) = -v(z) + iu(z).$$

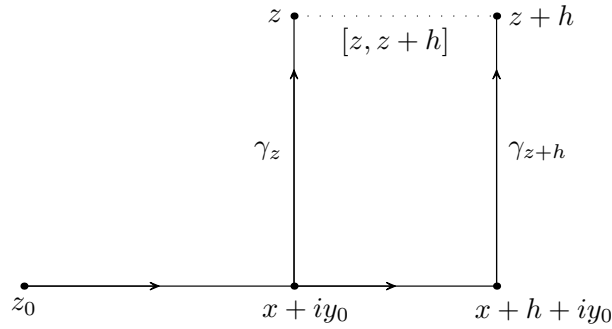
Identifioimalla tässä reaali- ja imaginaariosat puolittain saamme yhtälöt

$$(8.21) \quad U_y(z) = -v(z), \quad V_y(z) = u(z).$$

Tutkimme sitten osittaisderivaattoja x :n suhteen pisteessä z . Olkoon taas $h \neq 0$ reaalinen itseisarvoltaan pieni luku. Sovelletaan Goursat'n lemmaa nelikulmioon, jonka kärjet ovat $x + iy_0$, $x + h + iy_0$, $z + h$ ja z . Tämä sisältyy kiekkoon D , kunhan $|h|$ on kyllin pieni. Ottaen huomioon janojen suunnistukset saamme

$$\int_{\gamma_{z+h}} f(\zeta) d\zeta - \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta = 0$$

(ks. kuva alla).



Siten

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_{\gamma_{z+h}} f(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta \right) = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta.$$

Samoin kuin edellä näemme, että

$$\lim_{\mathbb{R} \ni h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z) = u(z) + iv(z),$$

joten

$$(8.22) \quad U_x(z) = u(z), \quad V_x(z) = v(z).$$

Vertaamalla yhtälöitä (8.21) ja (8.22) päätelemme, että $F = U + iV$ toteuttaa Cauchyn ja Riemannin yhtälöt. Koska lisäksi $f = u + iv$ on analyyttinen, ovat u ja v jatkuvia D :ssä, joten U ja V ovat jatkuvasti derivoituvia ja siten differentioituvia D :ssä (ks. huomautus 3.11a). Siispä lauseen 3.10 perusteella F on analyyttinen ja

$$F'(z) = U_x(z) + iV_x(z) = u(z) + iv(z) = f(z).$$

F on siis etsitty integraalifunktio f :lle. □

8.23 Huomautus. a) Cauchyn lauseessa 8.20 kiekon rooli on tärkeä: lauseen väite ei päde kaikissa kompleksitason osa-alueissa. Esimerkkinä alue $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, jossa funktiolle $1/z$ pätee $\int_{\partial D(0,1)} dz/z = 2\pi i \neq 0$.

Alueet, joissa lause 8.20 pätee, voidaan karakterisoida topologisella ehdolla (*yhdesti yhtenäisyys*); palaamme tähän ajan salliessa myöhemmin. Huomaa kuitenkin jo nyt, että yo. todistus toimii käytännössä sellaisenaan vaikkapa puolitasossa tai suorakulmiossa (keskipisteen sijasta valitaan jokin muu ”kantapiste” z_0).

b) Cauchyn lause voidaan todistaa varsin helposti differentiaali- ja integraalilaskennassa (vektorianalyysin kurssi) esitetyn Greenin kaavan¹ avulla, mikäli oletetaan lisäksi, että f' on jatkuva. Goursat’n lemmaa ei siis tällöin tarvita. Myöhemmin osoitamme, että analyyttisen funktion derivaatta on aina peräti analyyttinen, joten todellisuudessa kyse ei ole rajoittavasta oletuksesta; tämän seikan todistus kuitenkin perustuu viime kädessä Cauchyn lauseeseen. Joissakin oppikirjoissa vaatimus f' :n jatkuvuudesta otetaan jo mukaan analyyttisyyden määritelmään.

c) Goursat’n lemmasta on erilaisia versioita. Usein siinä tarkastellaan kolmion reunaa suorakulmion sijasta. Tällöin Cauchyn lauseen todistus on vastaavasti jonkin verran erilainen (ehkä hieman suoraviivaisempi). Meidän käyttämämme lähestymistapa löytyy mm. Ahlforsin kuuluisasta oppikirjasta *Complex Analysis* (1953).

¹Ks. esim. O. MARTIO: *Vektorianalyysi*, Limes ry (2. korj. p. 2008), lause 6.2.1.

9 Cauchyn kaava ja sen seurauksia

Esitämme tämän luvun aluksi lokaalin version Cauchyn integraalikaavasta. Tämä kaava kertoo, miten analyyttisen funktion arvot kiekon sisäpisteissä voidaan laskea sen arvoista kiekon reunalla, ja sillä on perustava merkitys analyyttisten funktioiden teoriassa. Todistammekin Cauchyn integraalikaavan avulla muutamia tärkeitä analyyttisten funktioiden ominaisuuksia.

Cauchyn integraalikaava ympyränkehälle

9.1 Lause (Cauchyn integraalikaava). *Oletetaan, että f on analyyttinen avoimessa joukossa $A \subset \mathbb{C}$ ja kiekolle $D = D(z_0, r)$ pätee $\overline{D} \subset A$. Tällöin*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D,$$

kun ∂D on D :n reuna suunnistettuna vastapäivään.

Tässä reunaympyrän ∂D voi parametrisoida esimerkiksi polulla $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, tai jollakin muulla suunnanmukaisella jatkuvasti derivoituvalla polulla.

Cauchyn integraalikaavan nojalla analyyttisen funktion f arvot kiekon $D(z_0, r)$ sisällä voidaan siis määrittää yksikäsitteisesti, jos tunnetaan f :n arvot ko. kiekon reunalla. Nähdään myös, että jokainen analyyttinen funktio voidaan lausua (reuna-arvoilla $f(\zeta)$ painotettuna) integraalina eli ”jatkuvana summana” yksinkertaisista analyyttisistä funktioista, jotka ovat muotoa $z \mapsto 1/(\zeta - z)$. Tämä esitys on tietysti lokaali siinä mielessä, että se riippuu valitusta kiekosta $D(z_0, r) \subset A$.

Cauchyn kaavan avulla voi joskus laskea kätevästi integraaleja, jotka suoraan määritelmään perustuen olisivat vaikeita.

9.2 Esimerkki. On laskettava integraali

$$I = \int_{\partial D(0,1)} \frac{e^z}{z(z-2)} dz$$

yksikköympyrän vastapäivään suunnistetun kehän yli. Havaitaan, että funktio $f(z) = e^z/(z-2)$ on analyyttinen kiekossa $D(0, 2)$, johon $\overline{D}(0, 1)$ sisältyy. Siten Cauchyn kaavan nojalla

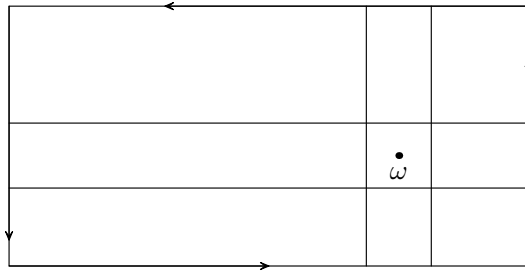
$$I = \int_{\partial D(0,1)} \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i \cdot f(0) = 2\pi i \cdot (-1/2) = -\pi i.$$

Ryhdyimme nyt todistamaan lausetta 9.1. Tarvitsemme tätä varten pienen teknisen yleistyksen Goursat'n lemmalle 8.17 ja vastaavasti Cauchyn lauseelle 8.20. Sallimme, että niissä tarkasteltavalla funktiolla f on yksi piste, jossa funktio ei (a priori) ole analyyttinen vaan ainoastaan jatkuva. Myöhempien tulosten valossa on kyllä helppoa nähdä, että tämä yleistys on vain näennäinen: f on väistämättä analyyttinen myös kyseisessä erikoispisteessä, mutta emme tiedä sitä vielä.

9.3 Apulause. *Olkkoon $R \subset \mathbb{C}$ suljettu suorakulmio kuten Goursat'n lemmassa 8.17 ja olkkoon $w \in R$. Oletetaan, että U on R :n ympäristö siten, että funktio f on analyyttinen joukossa $U \setminus \{w\}$ ja jatkuva myös pisteessä w . Tällöin $\int_{\partial R} f dz = 0$.*

Todistus. Koska f on jatkuva koko suorakulmiossa R (joka on suljettu ja rajoitettu joukko), se on siellä rajoitettu: $|f(z)| \leq M < \infty$ kaikilla $z \in R$.

Olkkoon w aluksi R :n sisäpiste. Valitaan pieni neliö $R_0 \subset \text{int } R$, jonka keskipiste on w ja sivut koordinaattiakselien suuntaisia. Jos R_0 :n sivujanoja jatketaan, suorakulmio R jakautuu yhdeksään osasuorakulmioon R_j : $R = \bigcup_{j=0}^8 R_j$ (ks. kuva alla).

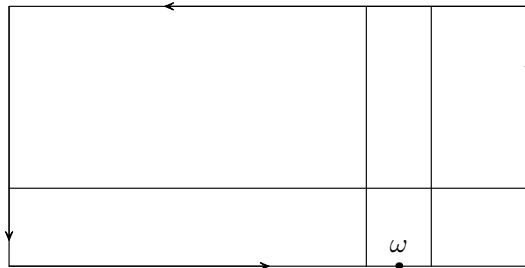


Suunnistetaan reunat ∂R_j vastapäivään, ja olkkoon reunan ∂R_0 pituus $\delta > 0$. Käyttämällä hyväksi vastakkaisuuntaisten polkuintegraalien kumoutumista kuten Goursat'n lemmän todistuksessa, näemme, että $\int_{\partial R} f dz = \sum_{j=0}^8 \int_{\partial R_j} f dz$. Toisaalta alkuperäisen Goursat'n lemmän nojalla $\int_{\partial R_j} f dz = 0$, kun $1 \leq j \leq 8$. Siten saamme

$$\left| \int_{\partial R} f dz \right| = \left| \int_{\partial R_0} f dz \right| \leq \int_{\partial R_0} |f| |dz| \leq M\delta$$

apulauseen 8.9 nojalla. Koska voidaan antaa $\delta \rightarrow 0+$, niin $\int_{\partial R} f dz = 0$.

Jos w on R :n reunapiste, jaamme R :n kuuteen osasuorakulmioon (tai vain neljään siinä tapauksessa, että w on R :n kulmapiste) yhdeksän sijasta (ks. kuva alla); nyt R_0 on pieni neliö jonka reunapisteinä on w .



Loppuosa päättelystä tehdään samalla idealla kuin äsken. □

9.4 Lause. Olkoon $D = D(z_0, R)$ kiekko ja $w \in D$. Oletetaan, että f on analyyttinen joukossa $D \setminus \{w\}$ ja jatkuva myös pisteessä w . Tällöin

$$\int_{\gamma} f dz = 0$$

jokaisella umpinaisella paloittain C^1 polulla γ kiekossa D .

Todistus. Täysin sama kuin lauseen 8.20 todistus, kunhan vain Goursat'n lemmasta käytetään yo. versiota 9.3. Pane merkille, että f :n analyyttisyyttä ei todistuksessa suoraan tarvittu: riitti, että f on jatkuva ja Goursat'n lemma pätee. \square

Olemme nyt valmiit todistamaan Cauchyn integraalikaavan.

Lauseen 9.1 todistus. Olkoon $z \in D$ kiinteä ja

$$F(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \zeta \in D \setminus \{z\}, \\ f'(z), & \zeta = z. \end{cases}$$

Tällöin F on analyyttinen joukossa $D \setminus \{z\}$ ja jatkuva sen lisäksi myös z :ssa. Koska $\bar{D} \subset A$ ja A on avoin, \bar{D} sisältyy hieman suurempaan avoimeen kiekkoon, joka yhä sisältyy A :han. Siten voidaan soveltaa edellistä lausetta 9.4, jonka mukaan

$$0 = \int_{\partial D} F(\zeta) d\zeta = \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_{\partial D} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Väite seuraa, jos osoitamme, että tässä viimeisenä esiintyvä integraali on $2\pi i$. Oletetaan merkintöjen yksinkertaistamiseksi, että $z_0 = 0$, ja lasketaan parametriesitystä $\zeta = re^{it}$ käyttäen:

$$(9.5) \quad \begin{aligned} \int_{\partial D} \frac{d\zeta}{\zeta - z} &= \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{re^{it} - z} dt = i \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - \frac{z}{r} e^{-it}} \\ &= i \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{\frac{z}{r} e^{-it}}{1 - \frac{z}{r} e^{-it}} \right) dt = 2\pi i + \int_0^{2\pi} \frac{\frac{z}{r} i e^{-it}}{1 - \frac{z}{r} e^{-it}} dt. \end{aligned}$$

Viimeinen integraali tässä voidaan puolestaan tulkita polkuintegraalina $\int_{\sigma} d\xi/(1 + \xi)$, kun σ on polku $\sigma(t) = -\frac{z}{r} e^{-it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Koska $|\frac{z}{r}| < 1$, kyseessä on umpinainen polku yksikkökiekossa $D(0, 1)$, jossa funktio $\xi \mapsto 1/(1 + \xi)$ on selvästi analyyttinen. Siten Cauchyn integraalilauseen 8.20 nojalla kyseinen integraali häviää. Siten kaavan (9.5) integraalin arvo on $2\pi i$. \square

Analyyttisen funktion Taylor-sarja

Ensimmäisenä sovelluksena Cauchyn integraalikaavasta osoitamme, että jokainen analyyttinen funktio on lokaalisti suppenevan potenssisarjan summa.

Tarvitsemme sarjojen tasaista suppenemista, ja sitä varten palautamme mieleen seuraavan perustyökalun:

9.6 Apulause (Weierstrassin kriteeri). Olkoot $f_k: A \rightarrow \mathbb{C}$ funktioita sekä c_k positiivisia lukuja, joille

$$|f_k(z)| \leq c_k \quad \text{kaikilla } z \in A, k \geq 0.$$

Jos sarja $\sum_k c_k$ suppenee, niin $\sum_k f_k$ suppenee tasaisesti (ja itseisesti) A :ssa.

Todistus. Majoranttiperiaatteen nojalla $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ suppenee itseisesti, kun $z \in A$. Olkoon sen summa $f(z)$. Olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin on olemassa $N \geq 1$ siten, että $\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k < \epsilon$, kun $n \geq N$. Siten kaikilla $n \geq N$ ja $z \in A$ pätee

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^n f_k(z) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k < \epsilon.$$

Tämä merkitsee, että osasummat $\sum_{k=0}^n f_k$ suppenevat tasaisesti kohti f :ää joukossa A , mikä todistaa väitteen. \square

9.7 Lause. Olkoon f analyyttinen avoimessa joukossa $A \subset \mathbb{C}$. Jos $D(z_0, R) \subset A$, niin f :llä on kiekossa $D(z_0, R)$ esitys suppenevan potenssisarjan summana:

$$(9.8) \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad z \in D(z_0, R),$$

jossa

$$(9.9) \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta,$$

kun $0 < r < R$ ja ympyrä $\partial D(z_0, r)$ suunnistetaan positiivisesti.

Analyyttinen funktio voidaan siis määrittelyjoukkonsa jokaisen pisteen ympäristössä kehittää potenssisarjaksi. Tämä esitys ei yleensä ole voimassa koko A :ssa. Huomaa kuitenkin, että kiekon $D(z_0, R)$ säde R voidaan valita maksimaalisen suureksi, ts. pisteen z_0 etäisyydeksi joukon A reunasta. Jos $A = \mathbb{C}$, on ko. sarjaesitys itse asiassa voimassa koko tasossa ja voimme tulkita yllä $R = \infty$.

Todistus. Olkoot $0 < r < R$ ja $z \in D(z_0, r)$. Cauchyn integraalikaavan 9.1 nojalla on

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Jokaisella $\zeta \in \partial D(z_0, r)$ voidaan kirjoittaa

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k,$$

koska $|z - z_0|/|\zeta - z_0| = |z - z_0|/r < 1$. Näin ollen

$$(9.10) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k d\zeta.$$

Koska f on jatkuva kompaktissa joukossa $\partial D(z_0, r)$, se on siellä rajoitettu: $|f(\zeta)| \leq M < \infty$ kaikilla $\zeta \in \partial D(z_0, r)$. Siten

$$\left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k \right| \leq \frac{M}{r} \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^k.$$

Koska näin saadut majorantit muodostavat suppenevan geometrisen sarjan, Weierstrassin kriteerin mukaan kaavan (9.10) sarja suppenee tasaisesti ympyrällä $\partial D(z_0, r)$. Niinpä voimme vaihtaa summauksen ja integroinnin järjestystä (vrt. harjoitustehtävä jonoille), jolloin saamme:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^k,$$

mikä on vaadittu esitys.

Huomaa lopuksi, että edellä r voidaan valita mielivaltaisen läheltä sädettä R ja potenssisarjan kertoimien yksikäsitteisyyden nojalla tuloksena saadaan aina sama sarja. Siten esitys (9.8) on voimassa koko kiekossa $D(z_0, R)$. \square

Taylor-sarjakehitelmän olemassaolosta saamme monia mielenkiintoisia seurauksia. Näissä kaikissa oletamme, että A on kompleksitason avoin osajoukko.

9.11 Seuraus. *Jos f on analyyttinen A :ssa, niin myös f' on analyyttinen A :ssa. Yleisemmin f :llä on A :ssa kaikkien kertalukujen derivaatat ja*

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta,$$

kun $\overline{D}(z_0, r) \subset A$.

Todistus. Edellisen lauseen mukaan $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ kiekossa $D(z_0, r)$, kun a_k määritellään kaavalla (9.9). Toisaalta potenssisarjojen derivointia koskevan seurauslauseen 7.10 nojalla $f^{(k)}(z_0) = k! a_k$. \square

9.12 Huomautus. Edellisen seurauksen integraalikaava $f^{(k)}$:lle on voimassa muualakin kuin vain kyseisen kiekon keskipisteessä. Kuten Cauchyn kaavassa 9.1, pätee nimittäin

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta, \quad z \in D(z_0, r),$$

kun $\overline{D}(z_0, r) \subset A$. Toisin sanoen Cauchyn kaavassa voidaan derivoida ”integraalimerkin alla”. Tämän todistus on harjoitustehtävä.

9.13 Seuraus. *Jos f on analyyttinen A :ssa ja $f = u + iv$, niin u :lla ja v :llä on A :ssa kaikkien kertalukujen osittaisderivaatat.*

Todistus. Lauseen 3.10 nojalla u :lla ja v :llä on ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat ja $f' = u_x + iv_x = v_y - iu_y$. Koska nyt tiedämme, että f' on analyyttinen, voimme soveltaa samaa tulosta näihin f' :n esityksiin, jolloin näemme, että u :lla ja v :llä on kaikki toisen kertaluvun osittaisderivaatat. Yleinen väite seuraa induktiolla. \square

Käänteiseen suuntaan saamme riittäviä ehtoja analytyttisyydelle. Osoittautuu, että lauseen 8.14 tilanteessa funktio f on väistämättä analytyttinen.

9.14 Seuraus. *Oletetaan, että funktiolla $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ on integraalifunktio. Tällöin f on analytyttinen.*

Todistus. Olkoon F funktion f integraalifunktio. Siis F on analytyttinen ja $F' = f$. Seurauksen 9.11 nojalla f on analytyttinen. \square

Viimeinen seuraus on klassinen käänteistulos Cauchyn integraalilauseelle:

9.15 Seuraus (Morera'n lause). *Oletetaan, että $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ on jatkuva ja $\int_{\gamma} f dz = 0$ jokaisella umpinaisella paloittain C^1 polulla γ joukossa A . Tällöin f on analytyttinen.*

Tässä olisi itse asiassa riittävää vaatia, että $\int_{\partial R} f dz = 0$ aina kun R on suljettu suorakulmio, jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset ja joka sisältyy A :han (Goursat'n lemmän tilanne)! Todistus on harjoitustehtävä. Huomaa, että lähtöjoukosta A ei nyt tarvinnut olettaa avoimuuden lisäksi mitään. Tämä on ymmärrettävää, kun muistetaan, että analytyttisyys on luonteeltaan täysin lokaali ominaisuus.

Eräitä Taylor-sarjoja

Eksponenttifunktio $z \mapsto e^z$ on analytyttinen koko tasossa, ja kaavaa $\frac{d}{dz} e^z = e^z$ iteroimalla nähdään, että sen jokainen derivaatta origossa on $e^0 = 1$. Siten saadaan tuttu Taylor-sarjaesitys

$$(9.16) \quad e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Tämä olisi hyvin voitu ottaa eksponenttifunktion määritelmäksi.

Olkoon sitten \log logaritmfunktion päähaara, joka on määritelty negatiivista reaaliakselia pitkin aukileikatussa tasossa $A = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$; ks. kaava (4.7) ja lause 4.8. Ei ole mahdollista esittää tätä potenssisarjan summana koko A :ssa vaan ainoastaan siihen sisältyvissä kiekkoissa, esim. kiekossa $D(1, 1)$. Yhtäpitävästi funktiolle $\log(1+z)$ saadaan yksikkökiekossa esitys (tee yksityiskohdat harjoitustehtävänä)

$$\log(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots, \quad |z| < 1.$$

Se yhtyy positiivisella reaaliakselilla tavalliseen reaaliseen logaritmfunktioon.

Esittelemme vielä lyhyesti trigonometriset funktiot kompleksitasossa.

9.17 Määritelmä. Kun $z \in \mathbb{C}$, määritellään

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}).$$

Sivulla 7 on todettu, että reaaliakselilla nämä kaavat ovat voimassa reaalille sinille ja kosinille. Lähtemällä eksponenttifunktion Taylor-sarjasta (9.16) voidaan näille johtaa sarjakehitelmät

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots, \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

Analyyttisen funktion nollakohdat ja yksikäsitteisyys

Taylor-sarjojen avulla voimme tarkastella monia analyyttisten funktioiden lokaaleja ominaisuuksia. Tyypillisenä esimerkkinä ovat funktioiden nollakohdat. Sarjakehitelmän ansiosta analyyttisen funktion nollakohtia voidaan käsitellä samaan tapaan kuin polynomin nollakohtia.

Olkoon f analyttinen pisteessä z_0 (ts. jossakin sen ympäristössä) ja $f(z_0) = 0$. Lauseesta 9.7 saadaan $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ jossakin kiekossa $D(z_0, R)$. Oletetaan, että n on pienin indeksi, jolle $a_n \neq 0$. Derivaattojen avulla ilmaistuna siis $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$ mutta $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Tässä tilanteessa voidaan kirjoittaa

$$(9.18) \quad f(z) = (z - z_0)^n g(z), \quad \text{jossa } g \text{ analyttinen, } g(z_0) \neq 0;$$

nimittäin $g(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k(z - z_0)^{k-n}$.

9.19 Määritelmä. Yo. tilanteessa z_0 on f :n n :nnen kertaluvun nollakohta.

Kuinka suuressa joukossa analyttinen (ei-vakio) funktio voi hävitä? Tuntemamme esimerkit näyttävät osoittavan, että analyttisen funktion nollakohtien joukko on yleensä varsin pieni ja harva, jopa tyhjä.

9.20 Esimerkki. Merkitään $E(f) = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = 0\}$. Jos $f(z) = e^z$, niin $E(f) = \emptyset$. Jos f on polynomi, $E(f)$ on äärellinen, ja jos $f(z) = \sin z$, niin $E(f) = \{n\pi : n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

Osoittautuikin, että alueessa määritellyn analyttisen funktion nollakohdat voivat kasautua korkeintaan alueen reunalle, paitsi jos funktio on identtisesti nolla. (Palauta mieleen kasautumispisteen käsite topologiasta tai luvusta 2.)

9.21 Lause. *Olkoon f analyttinen alueessa $A \subset \mathbb{C}$. Oletetaan, että joukolla $E = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = 0\}$ on kasautumispiste A :ssa. Tällöin $f \equiv 0$ A :ssa.*

Todistus. Oletetaan, että $z_0 \in A$ on E :n kasautumispiste. Tällöin on olemassa jono (z_n) joukon $A \setminus \{z_0\}$ pisteitä, joille $z_n \rightarrow z_0$. Olkoon

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k, \quad z \in D(z_0, R),$$

funktion f lokaali potenssisarjaesitys. Voidaan olettaa, että $z_n \in D(z_0, R)$ kaikilla n (leikkaamalla tarvittaessa alkuosa jonosta pois). Osoitamme induktiolla, että $a_k = 0$

kaikilla $k \geq 0$. Jatkuvuuden nojalla $a_0 = f(z_0) = \lim f(z_n) = 0$. Oletetaan, että on jo näytetty, että $a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0$. Tällöin yhtälön (9.18) mukaisesti $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$, jossa $g(z) = a_k + a_{k+1}(z - z_0) + a_{k+2}(z - z_0)^2 + \dots$ kiekossa $D(z_0, R)$. Koska $(z - z_0)^k \neq 0$ pisteissä $z = z_n$, on oltava $g(z_n) = 0$ kaikilla n . Jatkuvuuden nojalla taas $a_k = g(z_0) = 0$. Induktio on siis suoritettu, ja päättelemme, että $f(z) = 0$ kiekossa $D(z_0, R)$.

Jotta voisimme osoittaa $f \equiv 0$ koko A :ssa, tarvitsemme pienen topologisen lisäpäätelyn. Olkoon $E' = \{a \in A : a \text{ on } E\text{:n kasautumispiste}\}$. Äskeinen päätely osoittaa, että E' on avoin (oletuksesta $z_0 \in E'$ seurasi $D(z_0, R) \subset E'$). Toisaalta topologiasta seuraa yleisesti, että kasautumispisteiden joukko on suljettu A :ssa. Koska A on yhtenäinen ja oletuksen mukaan E' on epätyhjä, on oltava $E' = A$. Koska f on jatkuva, välttämättä $f \equiv 0$. \square

Soveltamalla edellistä lausetta kahden funktion erotukseen saamme vahvan yksikäsitteisyyslauseen analyyttisille funktioille.

9.22 Seuraus. *Olkoot f ja g analyyttisiä alueessa $A \subset \mathbb{C}$. Jos $f(z) = g(z)$ joukossa, jolla on kasautumispiste A :ssa, niin $f = g$.*

9.23 Huomautus. Pohditaan hetki eksponenttifunktion määritelmää tämän tuloksen valossa. Kaavassa (4.2) määrittelimme $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, ja tiedämme, että tämä on a) analyyttinen koko kompleksitasossa ja b) yhtyy reaaliakselilla \mathbb{R} reaaliseen eksponenttifunktioon e^x . Koska \mathbb{R} :llä on kasautumispisteitä \mathbb{C} :ssä (jokainen \mathbb{R} :n piste on sellainen), niin seurauksesta 9.22 voimme päätellä, että tämä on itse asiassa ainoa funktio, jolla on mainitut ominaisuudet a ja b!

Vastaavat kommentit voidaan lausua myös määritelmässä 9.17 määritellyistä sini- ja kosinifunktiosta.

Liouvilien lause

Lauseessa 9.7 analyyttisen funktion f arvot kiekon reunalla kontrolloivat f :n Taylorin sarjan kertoimia eli derivaattoja kiekon keskipisteessä. Tätä seikkaa voi hyödyntää monellakin tavalla; tässä jaksossa osoitamme, että koko tasossa analyyttinen funktio (eli ns. *kokonainen* funktio) voi olla rajoitettu vain jos se on vakio. Tällä on helppona seurauksena algebran peruslause, jonka mukaan jokaisella epätriviaalilla polynomiyhtälöllä on ratkaisu kompleksitasossa.

9.24 Apulause (Cauchyn kerroinarvio). *Oletetaan, että f on analyyttinen kiekon $\bar{D}(z_0, r)$ ympäristössä ja f :n lokaali Taylor-sarjaesitys on*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Olkoon $M(r) = \sup\{|f(z)| : z \in \partial D(z_0, r)\}$. Tällöin

$$|a_k| \leq \frac{M(r)}{r^k} \quad \text{kaikilla } k \geq 0.$$

Todistus. Lauseen 9.7 mukaan

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta.$$

Apulauseen 8.9 avulla voimme arvioida:

$$|a_k| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|^{k+1}} |d\zeta| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M(r)}{r^{k+1}} 2\pi r = \frac{M(r)}{r^k}.$$

□

9.25 Lause. *Olkoon f koko tasossa analyyttinen funktio.*

a) (Liouvillen lause) *Jos f on rajoitettu, se on vakio.*

b) *Yleisemmin: jos on olemassa luvut $C > 0$, $R > 0$ ja $n \geq 0$ siten, että*

$$|f(z)| \leq C|z|^n, \quad \text{kun } |z| > R,$$

niin f on polynomi, jonka aste on $\leq n$.

Lauseen jälkimmäinen osa siis kertoo, että jos kokonainen funktio $f(z)$ kasvaa polynomista vauhtia, kun $z \rightarrow \infty$, sen on pakko olla polynomi. Eksponenttifunktio e^z on perusesimerkki kokonaisesta funktiosta, joka ei ole polynomi.

Todistus. Riittää todistaa b-väite, sillä a vastaa erikoistapausta $n = 0$.

Nyt lause 9.7 kertoo, että f :llä on koko tasossa Taylor-sarja

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Kun $r > R$, saadaan edellisen apulauseen ja oletuksen nojalla kertoimelle a_k arvio

$$|a_k| \leq \frac{Cr^n}{r^k} = \frac{C}{r^{k-n}}.$$

Jos $k > n$, niin tässä $C/r^{k-n} \rightarrow 0$, kun $r \rightarrow \infty$, joten $a_k = 0$. Näin ollen $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$. □

Liouvillen lausetta käyttäen saamme lyhyen todistuksen sille, että kompleksilukujen kunta on algebrallisesti suljettu, ts. jokaisella kompleksikertoimisella polynomilla, joka ei ole vakio, on juuri (eli nollakohta) \mathbb{C} :ssä.

9.26 Lause (Algebran peruslause). *Olkoon $P(z)$ astetta $n \geq 1$ oleva kompleksikertoiminen polynomi. Tällöin $P(z) = 0$ jollakin $z \in \mathbb{C}$.*

Todistus. Kirjoitetaan $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$, jossa $a_n \neq 0$, ja tehdään vasta oletus: $P(z) \neq 0$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Tällöin funktio $g = 1/P$ on analyyttinen koko tasossa.

Kuten esimerkissä 5.16a kolmioepäyhtälön avulla saadaan arvio

$$|P(z)| \geq |z|^n \left(|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \dots - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right),$$

kun $z \neq 0$. Tästä nähdään, että $|P(z)| \rightarrow \infty$, kun $|z| \rightarrow \infty$, joten on olemassa $R > 0$ siten, että $|P(z)| \geq 1$, kun $|z| > R$. Siis $|g(z)| \leq 1$, kun $|z| > R$. Toisaalta kompaktissa (eli suljetussa ja rajoitetussa) joukossa jatkuva funktio on aina rajoitettu, joten on olemassa M siten, että $|g(z)| \leq M$, kun $|z| \leq R$. Näiden arvioiden mukaan g on koko tasossa analyyttinen ja rajoitettu funktio, siis Liouvillen lauseen nojalla vakio. Siten myös P on vakio, mikä on ristiriidassa sen kanssa että ko. polynomien aste oli ≥ 1 .

Siis P :llä on ainakin yksi nollakohta. □

Kun n -asteisella ($n \geq 1$) polynomilla P on nollakohta z_1 , voimme tunnetusti jakaa sen muotoon $P(z) = (z - z_1)P_1(z)$, jossa P_1 :n aste on $n - 1$ (tämä seuraa myös yhtälöstä (9.21)). Jos $n \geq 2$, toistamme saman päättelyn P_1 :lle. Näin jatkamalla saamme jaettua polynomien P ensimmäisen asteen tekijöihin muotoon

$$P(z) = a_n(z - z_1) \cdots (z - z_n),$$

jossa luvut $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ ovat polynomien kaikki nollakohdat. Jokainen polynomi kompleksilukujen kunnassa voidaan näin jakaa ensimmäisen asteen tekijöihin. (Vertaa: Reaalilukujen kunnassa toisen asteen polynomi $1 + x^2$ on jaoton.)

Maksimiperiaate ja Schwarzin lemma

Maksimiperiaate eri versioineen on yksi funktioteorian keskeisiä periaatteita. Karkeasti ottaen se kertoo, että analyyttisen funktion moduli saa suurimmat arvonsa funktion määrittelyalueen reunalla; erityisesti modulilla ei ole (lokaaleja) maksimeja itse määrittelyalueessa, paitsi jos funktio on vakio.

Aputulokseksi tarvitsemme seuraavan varsin tyylikkään havainnon: analyyttisen funktion arvo pisteessä z_0 saadaan laskemalla keskiarvo sen arvoista z_0 -keskisellä ympyränkehällä!

9.27 Apulause (Gaussin keskiarvolause). *Oletetaan, että f on analyyttinen kiekon $\bar{D}(z_0, r)$ ympäristössä. Tällöin*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

Todistus. Olkoon $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Polku γ kiertää ympyränkehän $\partial D(z_0, r)$ vastapäivään, joten Cauchyn kaavan nojalla

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z_0} \gamma'(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt. \end{aligned}$$

□

9.28 Lause (Maksimiperiaatteen heikko muoto). *Oletetaan, että f on analyyttinen alueessa $A \subset \mathbb{C}$. Jos $|f|$:llä on lokaali maksimi jossakin A :n pisteessä, niin f on vakio.*

Todistus. Olkoon $z_0 \in A$ piste, jossa $|f|$:llä on lokaali maksimi. Siis on olemassa kiekko $D(z_0, R) \subset A$, jossa pätee $|f(z)| \leq |f(z_0)|$. Kun sovelletaan tätä oletusta ja Gaussin keskiarvolauseetta säteellä $r \in (0, R)$, saadaan arviot

$$(9.29) \quad |f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt \leq |f(z_0)|.$$

Siis itse asiassa tässä yhtäsuuruudet pätevät. Väitämme, että $|f(z_0 + re^{it})| = |f(z_0)|$ kaikilla t . Muutoin olisi olemassa t_0 siten, että pätee aito epäyhtälö $|f(z_0 + re^{it})| < |f(z_0)|$ arvolla $t = t_0$. Mutta jatkuvuuden nojalla tämä pätee myös jollakin pienellä välillä, joka sisältää t_0 :n, ja tällöin (9.29):ssa ensimmäinen \leq olisikin aito $<$, mikä on mahdotonta. Siis väite pätee.

Koska edellä r oli mielivaltainen säde väliltä $(0, R)$, päättelemme, että $|f(z)| = |f(z_0)|$ kaikilla $z \in D(z_0, R)$. Lauseen 3.13 nojalla f :llä on vakioarvo c kiekossa $D(z_0, R)$. Yksikäsitteisyyslauseen (seuraus 9.22) perusteella $f = c$ koko A :ssa. \square

Maksimiperiaate tulee usein käyttöön seuraavan version muodossa. Siinä $\partial_\infty A$ tarkoittaa joukon $A \subset \mathbb{C}$ reunaa laajennetun tason suhteen, jolloin $\infty \in \partial_\infty A$ jos ja vain jos A on rajoittamaton. Siten esimerkiksi $\partial_\infty \mathbb{C} = \{\infty\}$.

9.30 Lause (Maksimiperiaatteen vahva muoto). *Oletetaan, että f on analyttinen alueessa $A \subset \mathbb{C}$ ja*

$$(9.31) \quad \limsup_{z \rightarrow \zeta} |f(z)| \leq M \quad \text{kaikilla } \zeta \in \partial_\infty A.$$

Tällöin

$$(9.32) \quad |f(z)| \leq M \quad \text{kaikilla } z \in A,$$

ja jos yhtäsuuruus $|f(z)| = M$ pätee yhdessäkin pisteessä $z \in A$, niin f on vakio.

Tässä funktion f yläraja-arvo \limsup reunapisteessä ζ määritellään kaavalla (vrt. määritelmä jonoille luvussa 7)

$$\limsup_{z \rightarrow \zeta} |f(z)| = \lim_{r \rightarrow 0^+} \sup\{|f(z)| : z \in A \cap D(\zeta, r)\}.$$

Se on ei-negatiivinen reaaliluku tai $+\infty$ ja se yhtyy raja-arvoon $\lim_{z \rightarrow \zeta} |f(z)|$, jos tämä on olemassa. (Näin on esimerkiksi tilanteessa, jossa f voidaan jatkaa jatkuvaksi funktioksi reunalle $\partial_\infty A$.)

Todistus. Merkitään $S = \sup\{|f(z)| : z \in A\}$. On osoitettava, että $S \leq M$.

Supremumin määritelmän nojalla voidaan löytää jono (z_n) A :ssa siten, että $|f(z_n)| \rightarrow S$. Koska joukko $A \cup \partial_\infty A$ on kompakti (joukon A sulkeumana Riemannin pallolla, joka on kompakti avaruus), on olemassa osajono (z_{n_k}) , joka suppenee kohti ko. joukon pistettä z_0 . Jos $z_0 \in \partial_\infty A$, niin oletuksesta (9.31) seuraa $S \leq M$. Jos taas $z_0 \in A$, pätee f :n jatkuvuuden nojalla $|f(z_0)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |f(z_{n_k})| = S$. Näin ollen $|f|$ saavuttaa supremuminsa A :ssa ja maksimiperiaatteen heikon muodon nojalla f on vakio, jonka moduli on S , jolloin oletus (9.31) kertoo, että $S \leq M$.

Jos $|f(z)| = M$ jossakin pisteessä $z \in A$, niin tämä merkitsee (kuten edellä), että $|f|$ saavuttaa supremuminsa ja on siis vakio. \square

Maksimiperiaatteella on monia sovelluksia eri tilanteissa. Yksi tunnetuimmista on seuraava.

9.33 Lause (Schwarzin lemma). *Olkoon $D = D(0, 1)$ yksikkökierok. Oletetaan, että f on analyyttinen D :ssä ja $f(D) \subset \bar{D}$ sekä $f(0) = 0$. Tällöin $|f(z)| \leq |z|$ kaikilla $z \in D$, ja jos yhtäsuuruus pätee yhdessäkin pisteessä, niin f on kierto: $f(z) = \lambda z$, jossa $|\lambda| = 1$.*

Todistus. Kuten kaavan (9.18) yhteydessä opimme, oletuksen $f(0) = 0$ nojalla voidaan kirjoittaa $f(z) = zg(z)$, jossa g on analyyttinen D :ssä. Tälle pätee $|g(z)| = |f(z)/z| \leq 1/|z|$ kaikilla $z \in D \setminus \{0\}$, joten

$$\limsup_{z \rightarrow \zeta} |g(z)| \leq \limsup_{z \rightarrow \zeta} \frac{1}{|z|} = \frac{1}{|\zeta|} = 1$$

kaikilla $\zeta \in \partial D$. Maksimiperiaatteen vahvan muodon nojalla $|g(z)| \leq 1$ kaikilla $z \in D$, ja jos yhtäsuuruus pätee yhdessäkin pisteessä, niin g :llä on vakioarvo λ , jolle $|\lambda| = 1$. Väite seuraa tästä. \square

10 Cauchyn kaavan globaali muoto

Tämän luvun tarkoituksena on yleistää Cauchyn integraalilause ja -kaava alueisiin, jotka eivät välttämättä ole kiekkoja. Toisena tärkeänä tavoitteena on näyttää kuinka integrointia voidaan usein suuresti helpottaa muuntamalla integroitavia polkuja. Johdantona voisimme tarkastella esimerkiksi seuraavaa tapausta.

10.1 Esimerkki. Oletetaan, että on integroitava funktio

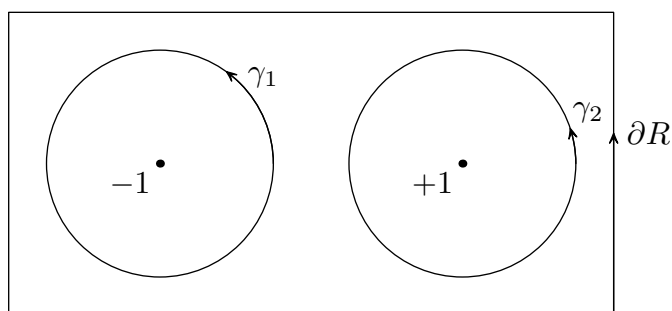
$$g(z) = \frac{2z}{z^2 - 1} = \frac{1}{z - 1} + \frac{1}{z + 1}$$

yli origokeskisen suorakulmion reunan ∂R , joka on vastapäivään suunnistettu. Olkoon suorakulmion leveys 5 ja korkeus 3.

Jos yritämme sijoittaa kyseiseen polkuintegraaliin suoraan ∂R :n jonkin parametrisoinnin, tarkasteltavan integraalin laskemisesta tulee hankalaa. Funktioteoria antaa meille kuitenkin helpottavia työkaluja: Cauchyn integraalilauseen avulla integrointipolkua ∂R voidaan deformoida. Itse asiassa osoitamme myöhemmin että

$$\int_{\partial R} g dz = \int_{\gamma_1} g dz + \int_{\gamma_2} g dz,$$

jossa γ_1 ja γ_2 ovat kuten kuvassa alla (1-säteisiä ympyränkehiä, joiden keskipisteinä -1 ja $+1$).



Funktion g integrointi yli ympyröiden γ_1 ja γ_2 onkin sitten helppoa: saadaan $\int_{\gamma_1} g dz = \int_{\gamma_2} g dz = 2\pi i$ (mieti miksi), joten $\int_{\partial R} g dz = 4\pi i$.

Esimerkkimme osoittaa, paitsi että polkujen muuntaminen helpottaa integrointia, myös että usein on kätevää tarkastella yleisempää tilannetta, jossa yksittäisten polkujen sijasta integroidaan pitkin näiden kokoelmia! Siis yllä ∂R :n sijasta voidaan integroida polkujen γ_1 ja γ_2 yhdistelmää, jota on tapana merkitä $\gamma_1 + \gamma_2$.

Syklit ja integrointi

Ryhdyimme kehittämään edellä mainittua umpinaisten polkujen yhdistelmien ideaa eteenpäin. Paitsi että haluamme integroida useamman eri umpinaisen polun yli, voimme myös ottaa lukuun mahdollisuuden käyttää samaa polkua useasti; esimerkiksi $2\gamma_1 + 5\gamma_2$ olisi kokoelma, jossa esiintyy kahdesti polku γ_1 ja viidesti γ_2 . Edelleen koska voimme tarvita myös vastapolkua, otamme käyttöön myös negatiiviset kertoimet; siten kokoelmassa $-3\gamma_1 + \gamma_2$ on polun γ_2 lisäksi kolme kertaa vastapolku γ_1^{-1} , jota nyt merkitsemme myös $-\gamma_1$. Lopuksi voimme myös sopia, että 0γ -tyyppisen termin lisääminen ei muuta kokoelmaa.

Kutsomme tällaisia umpinaisten polkujen kokoelmia *sykleiksi*. Yllä olevin tulkinnoin asetamme nyt seuraavat määritelmät:

10.2 Määritelmä. Jos $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ ovat umpinaisia paloittain C^1 polkua kompleksitasossa ja n_1, n_2, \dots, n_k ovat kokonaislukuja, niin (formaalia) äärellistä summaa

$$(10.3) \quad \sigma = n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2 + \dots + n_k\gamma_k$$

kutsutaan *sykliseksi*. Syklin σ jälki on

$$|\sigma| = |\gamma_1| \cup |\gamma_2| \cup \dots \cup |\gamma_k|,$$

jossa polun $\gamma_j: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ jälki on sen kuvajoukko $|\gamma_j| = \{\gamma_j(t) : a \leq t \leq b\}$.

Jos funktio f on jatkuva (ainakin joukossa $|\sigma|$), niin määrittelemme

$$(10.4) \quad \int_{\sigma} f dz = \sum_{j=1}^k n_j \int_{\gamma_j} f dz.$$

Meille sykli (10.3) on siis (hieman epämääräisesti) kokoelma polkua, jossa polku γ_j esiintyy n_j kertaa, jos $n_j > 0$, ja vastapolku $-\gamma_j = \gamma_j^{-1}$ esiintyy $-n_j$ kertaa, jos $n_j < 0$. Tälle voisi antaa myös abstraktin ja täsmällisen matemaattisen sisällön, mutta se ei ole meille tarpeen. Riittävää on, että syklin käsite tulee mielekkääksi ja konkreettiseksi integraalin määritelmän (10.4) kautta.

10.5 Huomautus. a) Yo. merkinnöin pätee $\int_{\gamma^{-1}} f dz = \int_{-\gamma} f dz = -\int_{\gamma} f dz$, joten integroitaessa negatiivisella kertoimella varustetut polut toimivat kuten pitääkin.

b) Yleisemmin syklin (10.3) *vastasykli* on $-\sigma = -n_1\gamma_1 - n_2\gamma_2 - \dots - n_k\gamma_k$, jolloin pätee $\int_{-\sigma} f dz = -\int_{\sigma} f dz$. Samoin luonnollisella tavalla voimme määritellä kahden syklin σ ja τ summan $\sigma + \tau$ ja erotuksen $\sigma - \tau$, jolloin $\int_{\sigma \pm \tau} f dz = \int_{\sigma} f dz \pm \int_{\tau} f dz$ olettaen tietysti, että f on jatkuva kummankin syklin jäljellä.

c) Syklit σ ja τ ovat *ekvivalentit*, mikäli $\int_{\sigma} f dz = \int_{\tau} f dz$ kaikilla jatkuvilla funktioilla f . Pidemmälle sykliden teoriaa kehitettäessä tällaiset syklit pitäisikin samastaa jo määritelmässä.

d) Syklin (10.3) *pituus* on $\ell(\sigma) = \sum_{j=1}^k |n_j| \ell(\gamma_j)$, jossa polun γ_j pituus $\ell(\gamma_j)$ on kuten aikaisemmin (ks. kaava (8.7)).

Polkujen ja syklien kierrosluvut

Esittelemme suureen, joka kertoo, montako kertaa umpinainen polku tai sykli kiertää tason pisteen ympäri.

10.6 Määritelmä. Syklin σ *kierrosluku* pisteen $a \in \mathbb{C} \setminus |\sigma|$ suhteen on

$$n(\sigma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{dz}{z - a}.$$

Erityisesti tämä määritelmä koskee siis umpinaisia paloittain C^1 polkuja. Jos σ on sykli, jolla on kaavan (10.3) mukainen esitys, niin määritelmän (10.4) nojalla

$$n(\sigma, a) = n_1 n(\gamma_1, a) + \cdots + n_k n(\gamma_k, a).$$

10.7 Esimerkki. Olkoon $\gamma(t) = e^{it}$, kun $0 \leq t \leq 2\pi$. Kyseessä on siis yksikköympyrän kehä positiiviseen suuntaan. Pisteessä $a = 0$ voimme laskea kuten ennenkin

$$n(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = 1.$$

Yleisemmin Cauchyn integraalikaava 9.1 kertoo, että $n(\gamma, a) = 1$ kaikilla $a \in D(0, 1)$. Toisaalta Cauchyn integraalilauseen 8.20 nojalla $n(\gamma, a) = 0$, kun $|a| > 1$. Saadut tulokset siis vastaavat täysin sitä havainnollista mielikuvaa, että polku γ kiertää yksikkökieron pisteet tasan kerran positiiviseen suuntaan ja se ei kierrä lainkaan suljetun yksikkökieron ulkopuolisia pisteitä!

Seuraava apulause kertoo kierrosluvun yleiset perusominaisuudet, kun pidämme syklin σ annettuna ja annamme pisteen a varioida, ts. tutkimme funktiota $a \mapsto n(\sigma, a)$ avoimessa joukossa $\mathbb{C} \setminus |\sigma|$.

Tässä yhteydessä on syytä palauttaa mieleen topologiasta, että avoin joukko $\mathbb{C} \setminus |\sigma|$ jakautuu maksimaalisiin yhtenäisiin osajoukkoihin, joita kutsutaan sen (yhtenäisiksi) komponenteiksi. Avoimen joukon tapauksessa nekin ovat avoimia, siis alueita. (Ks. luvun 2 loppua.) Koska syklin σ jälki $|\sigma|$ on aina rajoitettu joukko (mieti miksi!), on olemassa niin suuri säde $R > 0$, että joukko $\{z : |z| > R\}$, joka on yhtenäinen, ei kohtaa $|\sigma|$:aa. Siten $\{z : |z| > R\}$ sisältyy yhteen joukon $\mathbb{C} \setminus |\sigma|$ komponenteista. Tämä on ainoa *rajoittamaton komponentti*, sillä muut komponentit sisältyvät kiekkoon $\overline{D}(0, R)$.

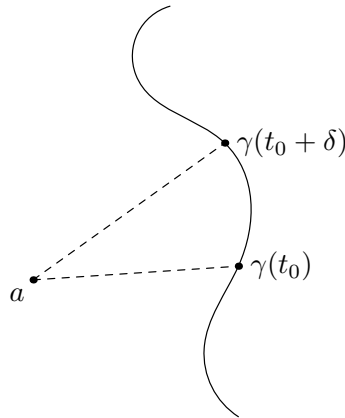
10.8 Apulause. Funktiolla $a \mapsto n(\sigma, a)$ on jokaisessa joukon $\mathbb{C} \setminus |\sigma|$ komponentissa vakio kokonaislukuarvo. Erityisesti $n(\sigma, a) = 0$ joukon $\mathbb{C} \setminus |\sigma|$ rajoittamattomassa komponentissa.

Ennen kuin ryhdymme todistamaan tätä apulauseetta, yritämme tulkita, mihin se perustuu ja miten määrittelemämme kierrosluku oikein toimii. Oletetaan vaikkapa, että $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ on C^1 polku ja $a \notin |\gamma|$. Jos $t_0 \in [0, 1)$, niin koska $a \neq \gamma(t_0)$, näemme, että logaritmilla $\log(z - a)$ on haara pisteen $\gamma(t_0)$ pienessä ympäristössä.

Jos siis $\delta > 0$ on kyllin pieni, γ :n osapolku $\gamma|[t_0, t_0 + \delta]$ sisältyy tähän ympäristöön ja voimme laskea:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma|[t_0, t_0 + \delta]} \frac{dz}{z - a} &= \int_{\gamma(t_0)}^{\gamma(t_0 + \delta)} \log(z - a) \\ &= \int_{\gamma(t_0)}^{\gamma(t_0 + \delta)} \log|z - a| + i \int_{\gamma(t_0)}^{\gamma(t_0 + \delta)} \arg(z - a). \end{aligned}$$

Imaginaariosa kertoo, kuinka paljon polun pisteen suuntakulma muuttuu pisteessä a olevasta havaitusijasta nähden, kun kuljetaan pisteestä $\gamma(t_0)$ pisteeseen $\gamma(t_0 + \delta)$ (ks. kuva alla).



Niinpä integraalin $\int_{\gamma} (z - a)^{-1} dz$ imaginaariosa kertoo suuntakulman kokonaismuutoksen a :sta nähden! Koska γ on umpinainen, tämän täytyy olla 2π :n kokonainen monikerta: jokainen kierros positiiviseen suuntaan lisää yhden 2π :n ja jokainen kierros negatiiviseen suuntaan vähentää yhden. Muistammekin, että logaritmin eri haarojen arvot samasta luvusta $\gamma(0) - a = \gamma(1) - a$ eroavat toisistaan $2\pi i$:n monikerralla. Reaaliosassa ei vastaavaa monikäsitteisyyttä ole, joten umpinaisen polun yli integraalin $\int_{\gamma} (z - a)^{-1} dz$ reaaliosa on nolla.

Edellä esitetty päättely antaa uskottavan perustelun sille, että kierrosluku on aina kokonaisluku, mutta sitä on hankala tehdä aivan täsmälliseksi. Seuraavassa todistuksessa tämä tehdäänkin toisella tavalla:

Apulauseen 10.8 todistus. Osoitamme ensin, että

$$n(\sigma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{dz}{z - a}$$

on kokonaisluku kiinteällä $a \notin |\sigma|$. Riittää tehdä tämä siinä tapauksessa, että σ on umpinainen paloittain C^1 polku $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$. Tarkastellaan reaalimuuttujan funktiota

$$h(x) = \int_0^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a} dt, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Siis määritelmän mukaan $h(1) = 2\pi i \cdot n(\gamma, a)$. Lukuunottamatta γ' :n epäjatkuvuuskohtia, joita on vain äärellinen määrä, pätee

$$h'(x) = \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x) - a}$$

ja siten

$$\frac{d}{dx}(e^{-h(x)}(\gamma(x) - a)) = e^{-h(x)}(\gamma'(x) - h'(x)(\gamma(x) - a)) = 0.$$

Koska γ ja h ovat jatkuvia kaikissa pisteissä, on funktio $\varphi(x) = e^{-h(x)}(\gamma(x) - a)$ vakio ja on siis oltava $\varphi(1) = \varphi(0) = \gamma(0) - a$. Siten

$$e^{h(1)} = \frac{\gamma(1) - a}{\varphi(1)} = \frac{\gamma(1) - a}{\gamma(0) - a} = 1,$$

koska γ on umpinainen. Siispä $h(1) = 2k\pi i$ eli $n(\gamma, a) = k$ jollakin kokonaisluvulla k .

Osoitamme seuraavaksi, että funktio $a \mapsto n(\sigma, a)$ on jatkuva joukossa $\mathbb{C} \setminus |\sigma|$. Olkoon $a_0 \in \mathbb{C} \setminus |\sigma|$, ja olkoon $2r$ tämän etäisyys jäljestä $|\sigma|$. Jos jonolle (a_n) pätee $a_n \rightarrow a_0$ kiekossa $D(a_0, r)$, niin

$$\left| \frac{1}{z - a_n} - \frac{1}{z - a_0} \right| = \frac{|a_n - a_0|}{|z - a_n||z - a_0|} \leq \frac{1}{2r^2} |a_n - a_0| \rightarrow 0$$

tasaisesti pisteiden $z \in |\sigma|$ suhteen. Siten $n(\sigma, a_n) \rightarrow n(\sigma, a_0)$, ja jatkuvuus on todistettu. Tarvitsemme nyt topologiasta tiedon: yhtenäisen (tai polkuyhtenäisen) joukon kuva jatkuvassa kuvauksessa on yhtenäinen (tai polkuyhtenäinen); ks. lause 2.24. Koska kokonaislukujen joukon ainoat (polku)yhtenäiset osajoukot ovat tyhjä joukko ja yksiöt, päätelemme, että $a \mapsto n(\sigma, a)$ kuvaa jokaisen joukon $\mathbb{C} \setminus |\sigma|$ komponenteista yksiöksi eli vakioarvoksi.

Apulauseen viimeinen väite seuraa siitä, että koska jälki $|\sigma|$ on rajoitettu, niin $1/(z - a) \rightarrow 0$ tasaisesti pisteiden $z \in |\sigma|$ suhteen, kun $|a| \rightarrow \infty$. Siten $n(\sigma, a) \rightarrow 0$, kun $|a| \rightarrow \infty$. Koska $n(\sigma, a)$ on kokonaisluku, tämä merkitsee, että se on nolla, kun $|a|$ on kyllin suuri, ja edellisen nojalla tämä pätee koko rajoittamattomassa komponentissa. \square

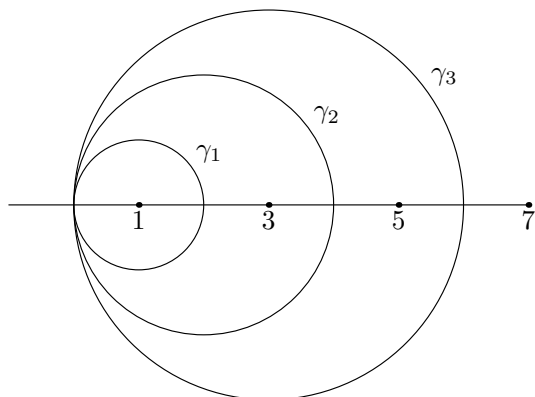
10.9 Esimerkki. a) Olkoon $\gamma^{-1}(t) = e^{-it}$, kun $0 \leq t \leq 2\pi$. Tämä on yksikköympyrän kehän parametointi negatiiviseen suuntaan eli myötäpäivään. Olennaisesti samanlaisella päättelyllä kuin esimerkissä 10.7 näemme, että $n(\gamma^{-1}, a) = -1$, kun $a \in D(0, 1)$, ja $n(\gamma^{-1}, a) = 0$, kun $|a| > 1$. Nämä seuraavat tietysti siitäkin, että vastapolkuun siirtyminen muuttaa polkuintegraalin arvon vastaluvukseen.

b) Olkoon $\gamma(t) = e^{imt}$, kun $0 \leq t \leq 2\pi$ ja m on kokonaisluku. Koska $\gamma'(t) = ime^{imt}$, laskemalla saadaan

$$n(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ime^{imt}}{e^{imt}} dt = m,$$

kuten tietysti pitääkin. Apulauseen 10.8 nojalla $n(\gamma, a) = m$ kaikilla $a \in D(0, 1)$.

c) Olkoon $\sigma = \gamma_1 - 2\gamma_2 + 3\gamma_3$, jossa γ_j on positiivisesti suunnistettu ympyrän kehä, jonka keskipisteenä ja säteenä on j . Siis esimerkiksi $\gamma_j(t) = j + je^{it}$, kun $0 \leq t \leq 2\pi$ (ks. kuva alla).



Tällöin $n(\sigma, 1) = 1 - 2 + 3 = 2$, $n(\sigma, 3) = -2 + 3 = 1$, $n(\sigma, 5) = 3$ ja $n(\sigma, 7) = 0$.

Globaali Cauchyn lause ja sovelluksia

Olemme nyt valmiit Cauchyn integraalilauseen ja -kaavan globaaleihin versioihin.

10.10 Lause (Cauchyn lause ja kaava). *Olkoon $A \subset \mathbb{C}$ alue sekä ja $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ analyyttinen. Olkoon σ sellainen sykli A :ssa (ts. $|\sigma| \subset A$), jolle*

$$(10.11) \quad n(\sigma, a) = 0 \quad \text{kaikilla } a \in \mathbb{C} \setminus A.$$

Tällöin

$$(10.12) \quad n(\sigma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in A \setminus |\sigma|,$$

ja

$$(10.13) \quad \int_{\sigma} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

Huomaa, että tämä tulos on voimassa kaikissa alueissa ja kaikille analyyttisille funktioille f . Ainoa rajoitus koskee sykliä σ , jonka yli integroidaan: sen kierrosluvun on oltava 0 jokaisen alueen ulkopuolisen pisteen suhteen. Tämä tarkoittaa sitä, että mikäli A :ssa on ”reikiä”, σ :n (kokonais)kierrosluku niiden suhteen on nolla.

Esitämme lauseen 10.10 todistuksen hieman myöhemmin. Huomataan kuitenkin heti, että kaava (10.13) seuraa helposti kaavasta (10.12): valitaan nimittäin kiinteä piste $z \in A \setminus |\sigma|$ ja tarkastellaan apufunktiota $F(\zeta) = f(\zeta)(\zeta - z)$. Silloin (10.12):n mukaan

$$0 = F(z)n(\sigma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} f(\zeta) d\zeta,$$

joten (10.13) on voimassa.

10.14 Esimerkki. a) Olkoon $A = D(z_0, R)$ kiekko. Silloin apulauseen 10.8 viimeisen väitteen mukaan $n(\sigma, a) = 0$ aina kun $a \notin D(z_0, R)$ ja σ on mikä tahansa sykli A :ssa. Näin ollen Cauchyn integraalikaavan lokaali muoto eli lause 9.1 seuraa lauseesta 10.10.

b) Olkoon $A = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ punkteerattu taso. Nyt ehto (10.11) vaatii, että $n(\sigma, 0) = 0$. Silloin kaavat (10.12) ja (10.13) pätevät mille tahansa analyyttiselle $f: A \rightarrow \mathbb{C}$.

Toisaalta näemme, että oletus $n(\sigma, 0) = 0$ on välttämätön: jos nimittäin $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, on yksikköympyrän kehän parametroida, niin $n(\gamma, 0) = 1$ ja $\int_{\gamma} z^{-1} dz = 2\pi i$, vaikka funktio $z \mapsto z^{-1}$ onkin analyyttinen A :ssa.

Globaalilla Cauchyn lauseella on seuraava erittäin hyödyllinen seuraus.

10.15 Seuraus (Polkujen deformaatio). *Olkoon f analyyttinen alueella $A \subset \mathbb{C}$, ja olkoot σ ja τ syklejä A :ssa siten, että*

$$n(\sigma, a) = n(\tau, a) \quad \text{kaikilla } a \in \mathbb{C} \setminus A.$$

Silloin

$$\int_{\sigma} f dz = \int_{\tau} f dz.$$

Todistus. Syklille $\sigma - \tau$ pätee $n(\sigma - \tau, a) = n(\sigma, a) - n(\tau, a) = 0$ kaikilla $a \in \mathbb{C} \setminus A$. (Ks. myös huomautus 10.5b.) Siten lauseen 10.10 nojalla

$$0 = \int_{\sigma - \tau} f dz = \int_{\sigma} f dz - \int_{\tau} f dz,$$

mistä väite seuraa. □

Polkuintegraalia laskettaessa saadaan siis deformoida integroimispolkua tai -sykliä mielivaltaisesti, kunhan vain pidetään huoli siitä, että kierrosluku alueen ulkopuolisten pisteiden (mahdollisten ”reikien”) suhteen pysyy samana!

10.16 Esimerkki. Palaamme esimerkkiin 10.1. Siinä integroitavana oli funktio $g(z) = 2z/(z^2 - 1)$ yli suorakulmion reunan ∂R , joka on vastapäivään suunnistettu. Funktio g on analyyttinen alueessa $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$, ja ilmeisestikin $n(\partial R, +1) = n(\partial R, -1) = 1$.

Toisaalta jos γ_1 ja γ_2 ovat ympyränkehät kuten esimerkissä 10.1 (keskipisteinä vastaavasti -1 ja $+1$, säteenä 1), niin syklille $\sigma = \gamma_1 + \gamma_2$ pätee samoin $n(\sigma, +1) = n(\sigma, -1) = 1$. Niinpä deformaatiolauseen 10.15 perusteella

$$\int_{\partial R} g dz = \int_{\sigma} g dz = \int_{\gamma_1} g dz + \int_{\gamma_2} g dz.$$

Tässä

$$\int_{\gamma_1} g dz = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z-1} dz + \int_{\gamma_1} \frac{1}{z+1} dz = 0 + 2\pi i = 2\pi i,$$

mikä nähdään suoralla laskulla (kun $\gamma_1(t) = -1 + e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$) tai sitten vetoamalla ensimmäisen integraalin osalta Cauchyn integraalilauseen perusversioon ja toisen osalta Cauchyn integraalikaavaan kiekossa. Samoin nähdään että $\int_{\gamma_2} g dz = 2\pi i$, ja siis saamme lopulta $\int_{\partial R} g dz = 4\pi i$, kuten aiemmin väitimme.

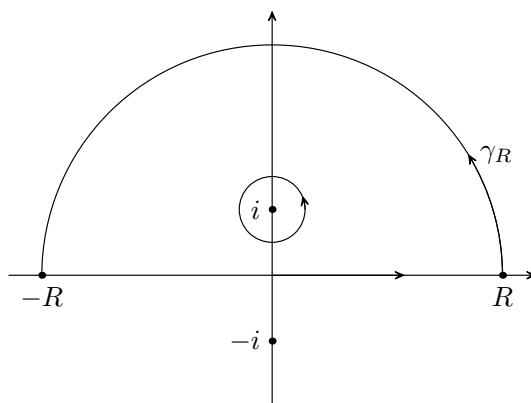
10.17 Esimerkki. On laskettava $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$.

Tämä integraali voidaan tunnetusti laskea reaalisen differentiaali- ja integraalilaskennan keinoin (tuloksena on π), mutta esitämme tässä kompleksianalyyttisen menetelmän, jota voidaan käyttää hyvin yleisissä tilanteissa. Ideana on jatkaa integroitava kompleksiseksi funktioksi

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{(z + i)(z - i)}$$

ja soveltaa siihen polkuintegraalimetojeja. Tämä voidaan jakaa kolmeen askeleeseen:

Askel 1. Valitaan $R > 0$ (suuri) sekä integroitava umpinainen polku γ_R , joka on puoliympyrän reuna, jota voisimme merkitä $\gamma_R = [-R, R] * \eta_R$, jossa $\eta_R(t) = Re^{it}$, kun $0 \leq t \leq \pi$; ks. kuva alla. (Käytimme tässä luvun 8 merkintätapaa tulopolulle, koska kyse ei ollut umpinaisten polkujen yhdistämisestä.)



Askel 2. Sovelletaan sitten polkujen deformaatioita. Funktio f on analyyttinen alueessa $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, mutta polun γ_R rajoittaman alueen sisällä on f :n navoista vain i . Olkoon siksi $\sigma = \partial D(i, r)$ positiivisesti suunnistettu ympyrän kehä, keskipisteenä i ja säteenä $r < 1$; ks. kuva yllä. Silloin $n(\gamma_R, i) = n(\sigma, i) = 1$ ja $n(\gamma_R, w) = n(\sigma, w) = 0$ kaikissa pisteissä w γ_R :n ”ulkopuolella”, erityisesti pisteessä $w = -i$. Siis seurauksen 10.15 ja Cauchyn kaavan mukaan

$$(10.18) \quad \int_{\gamma_R} f dz = \int_{\sigma} f dz = \int_{\partial D(i, r)} \frac{1/(z + i)}{z - i} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{i + i} \right) = \pi$$

Askel 3. Arvioidaan lopuksi polkuintegraalia

$$(10.19) \quad \int_{\gamma_R} f dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\eta_R} f(z) dz,$$

kun $R \rightarrow +\infty$. Tällöin $\int_{-R}^R f(x) dx \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = I$ kun taas

$$\left| \int_{\eta_R} f(z) dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{Rie^{it}}{R^2 e^{i2t} + 1} dt \right| \leq \int_0^\pi \frac{R}{R^2 - 1} dt = \frac{\pi R}{R^2 - 1} \rightarrow 0.$$

Siispä kaavoista (10.18) ja (10.19) seuraa, kun $R \rightarrow +\infty$, että $I = \pi$.

Näiden selitysten ja esimerkkien valossa voimme nähdä, että Cauchyn lauseen ja kaavan globaali versio 10.10 on vahva ja monipuolinen työkalu monessa tilanteessa. Lisäksi lauseen formulointiin on pakattu huomattava määrä informaatiota. Enää puuttuvat lauseen perustelut.

Cauchyn lauseen 10.10 todistus

Oletamme siis, että f on alueessa A analyyttinen ja σ on sellainen sykli A :ssa, joka toteuttaa kierroslukuehdon (10.11). Totesimme jo aikaisemmin, että riittää todistaa kaava (10.12).

Päätelyn perusidea on samankaltainen kuin todistettaessa Cauchyn kaavaa kiekossa (lause 9.1). Tarkastelemme funktiota $F: A \times A \rightarrow \mathbb{C}$,

$$(10.20) \quad F(z, \zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \zeta \neq z, \\ f'(z) = f'(\zeta), & \zeta = z. \end{cases}$$

Panemme merkille, että

$$(10.21) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} F(z, \zeta) d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z)n(\sigma, z), \end{aligned}$$

kun $z \in A \setminus |\sigma|$. Tulee siis osoittaa, että tämä lauseke häviää identtisesti. Sitä varten tutkimme kahta eri funktiota:

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} F(z, \zeta) d\zeta, \quad z \in A,$$

ja

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus |\sigma|.$$

Osoitamme, että näistä funktioista voidaan ”liimaamalla” rakentaa funktio, joka on analyyttinen koko \mathbb{C} :ssä ja lähestyy nollaa, kun $|z| \rightarrow \infty$. Tällöin Liouvilin lauseen pakottaa sen identtisesti nolaksi. Jotta ”liimaaminen” onnistuisi, tarvitsemme kierroslukuehtoa (10.11).

Näiden ideoiden toteuttaminen vaatii monta askelta ja huolellista analyysiä.

Vaihe 1. Osoitetaan, että kaavan (10.20) funktio $F: A \times A \rightarrow \mathbb{C}$ on jatkuva.

Riittää osoittaa jatkuvuus diagonaalipisteissä $(a, a) \in A \times A$. Koska seurauslauseen 9.11 mukaan f' on analyyttinen, se on jatkuva. Siten riittävän pienillä $\delta > 0$ on $|f'(w) - f'(a)| \leq \epsilon$, kunhan $w \in D(a, \delta) \subset A$. Lisäksi, jos $z, \zeta \in D(a, \delta)$, saadaan

$$f(\zeta) - f(z) = \int_{[z, \zeta]} f'(w) dw = (\zeta - z) \int_0^1 f'((1-t)z + t\zeta) dt$$

Siten kaikilla $z, \zeta \in D(a, \delta)$ pätee

$$|F(z, \zeta) - F(a, a)| = \left| \int_0^1 [f'((1-t)z + t\zeta) - f'(a)] dt \right| \leq \epsilon.$$

Tämä todistaa F :n jatkuvuuden.

Vaihe 2. Edellisen nojalla integroimalla saatu funktio

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} F(z, \zeta) d\zeta, \quad z \in A,$$

on hyvin määritelty. Osoitamme nyt, että se on jatkuva.

Olkoon $a \in A$, ja oletetaan, että $a_n \rightarrow a$ A :ssa. Tarvitsemme topologiasta tiedon: jokainen kompaktin joukon jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva.¹ Sovellamme tätä funktioon F joukossa $\overline{D}(a, \delta) \times |\sigma|$, jolloin näemme, että

$$\sup\{|F(a_n, \zeta) - F(a, \zeta)| : \zeta \in |\sigma|\} \rightarrow 0.$$

Koska funktioiden tasainen suppeneminen takaa polkuintegraalien suppenemisen (harjoitustehtävä), tästä seuraa $h(a_n) \rightarrow h(a)$. Koska sekä piste a että jono (a_n) olivat mielivaltaisia A :ssa, h on jatkuva A :ssa.

Vaihe 3. Osoitamme, että h on analyyttinen alueessa A .

Olkoon $D(a, r) \subset A$ mielivaltainen kiekko sekä γ umpinainen paloittain C^1 polku $D(a, r)$:ssä. Silloin

$$\int_{\gamma} h(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \left(\int_{\gamma} F(z, \zeta) dz \right) d\zeta.$$

Tässä olemme vaihtaneet integrointijärjestystä. Se on mahdollista, koska F on jatkuva ja myös σ ja γ voidaan olettaa jatkuvasti derivoituviksi (miksi?), jolloin voimme käyttää parametriesityksiä ja tietoa, että integroitaessa kahden reaalinmuuttujan jatkuvaa funktiota suljetussa suorakulmiossa integrointijärjestys on vaihdettavissa.²

Koska funktio $z \mapsto F(z, \zeta)$ on analyyttinen alueessa $A \setminus \{\zeta\}$ ja jatkuva myös ζ :ssa (vaihe 1), Cauchyn integraalilauseen yleistysten 9.4 nojalla $\int_{\gamma} F(z, \zeta) dz = 0$. Niinpä $\int_{\gamma} h(z) dz = 0$. Nyt Moreran lauseesta (seuraus 9.15) nähdään, että h on analyyttinen kiekossa $D(a, r)$. Koska tämä oli mielivaltainen kiekko A :ssa, väite on todistettu.

Vaihe 4. Osoitetaan, että funktio

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus |\sigma|,$$

on analyyttinen koko määrittelyjoukossaan.

Tutkimme erotusosamäärää. Olkoon $z \in \mathbb{C} \setminus |\sigma|$ kiinteä, ja valitaan kiekko $D(z, r) \subset \mathbb{C} \setminus |\sigma|$. Kun $0 < |h| < r$, voimme kirjoittaa (tarkista!)

$$\frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z - h)} d\zeta.$$

Kun $h \rightarrow 0$, on helppoa osoittaa, että integroitava lähestyy funktiota $f(\zeta)/(\zeta - z)^2$ tasaisesti pisteiden $\zeta \in |\sigma|$ suhteen (harjoitustehtävä). Siten

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

Tämä osoittaa, että g on analyyttinen. (Vaihtoehtoinen tapa olisi ollut matkia lauseen 9.7 todistusta ja kehittää g lokaalisti potenssisarjaksi.)

¹Ks. esim. J. Väisälä: *Topologia I*, Limes ry (3. korj. p. 2004), lause 13.36.

²Ks. esim. O. Martio: *Vektorianalyysi*, Limes ry (2. korj. p. 2008), lause 4.1.6.

Vaihe 5. Olkoon

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} \setminus |\sigma| : n(\sigma, z) = 0\}.$$

Tämä on avoin joukko, ja kierroslukuehdon (10.11) nojalla $\mathbb{C} \setminus A \subset \Omega$. Toisin sanoen $\mathbb{C} = A \cup \Omega$. Jos $z \in \Omega \cap A$, silloin sekä $h(z)$ että $g(z)$ ovat määriteltyjä ja kaavasta (10.21) nähdään, että $h(z) = g(z) - f(z)n(\sigma, z) = g(z)$. Näin ollen

$$H(z) = \begin{cases} h(z), & z \in A, \\ g(z), & z \in \Omega, \end{cases}$$

on hyvinmääritelty analyyttinen funktio koko \mathbb{C} :ssä

Vaihe 6. Osoitetaan, että H häviää identtisesti. Koska $h = H$ alueessa A , tämä todistaa lauseemme, kuten jo kaavan (10.21) yhteydessä todettiin!

Kun $|z|$ on kyllin suuri, z kuuluu joukon $\mathbb{C} \setminus |\sigma|$ rajoittamattomaan komponenttiin ja siten joukkoon Ω (apulause 10.8). Tällöin

$$|H(z)| = |g(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \frac{M\ell(\sigma)}{2\pi(|z| - R)} \rightarrow 0,$$

kun $|z| \rightarrow +\infty$. Tässä vakiot R ja M oli valittu siten, että $|\sigma| \subset D(0, R)$ ja $|f(\zeta)| \leq M$ kaikilla $\zeta \in |\sigma|$; tämä oli mahdollista $|\sigma|$:n kompaktisuuden ja f :n jatkuvuuden takia.

Näemme nyt, että H on rajoitettu (vrt. päättely algebran peruslauseen 9.26 todistuksessa) koko \mathbb{C} :ssä. Niinpä Liouvillen lause 9.25a kertoo, että H on vakio. Koska $H(z) \rightarrow 0$, kun $|z| \rightarrow +\infty$, kyseinen vakio on 0.

Yhdesti yhtenäiset alueet

Yleisessä kompleksitason alueessa globaali Cauchyn lause 10.10 toimii vain niille sykleille, joiden kierrosluku alueen ulkopuolisten pisteiden suhteen häviää (ehto (10.11)). Mutta eräillä alueilla tämä ehto on aina voimassa!

10.22 Määritelmä. Alue $A \subset \mathbb{C}$ on *yhdesti yhtenäinen*, jos $n(\gamma, w) = 0$ jokaisella A :n umpinaisella paloittain C^1 polulla γ ja jokaisella $w \in \mathbb{C} \setminus A$.

Havainnollisesti tämä siis merkitsee, että alueessa A ei ole ”reikiä”, jotka voisi umpinaisilla poluilla ”kiertää”.

Jokainen kiekko on yhdesti yhtenäinen; tämä seuraa jo Cauchyn integraalilauseen perusversiosta 8.20 (miten?). Muita yhdesti yhtenäisiä alueita ovat vaikkapa jokainen avoin suorakulmio tai puolitaso tai yleisemmin jokainen *konvekssi* alue (ks. määritelmä 2.19c). Tämä tulos on havainnollisesti ilmeinen (piirrä kuva ja tutki); sivuutamme tarkan todistuksen.

Seuraava kriteeri seuraa helposti apulausesta 10.8: Olkoon $A \subset \mathbb{C}$ rajoitettu alue. Jos sen komplementti $\mathbb{C} \setminus A$ on yhtenäinen (eli sillä on vain yksi komponentti, joka on rajoittamaton), niin A on yhdesti yhtenäinen.

Cauchyn lause saa yhdesti yhtenäisissä alueissa seuraavan yleisen muotoilun.

10.23 Lause. Olkoon $A \subset \mathbb{C}$ yhdesti yhtenäinen alue ja $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ analyyttinen. Tällöin jokaiselle syklille σ A :ssa pätee

$$n(\sigma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in A \setminus |\sigma|,$$

ja

$$\int_{\sigma} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

10.24 Huomautus. Esittämämme muotoilu globaalille Cauchyn lauseelle ja kaavalle on ns. *homologinen* versio tästä tuloksesta. Lauseelle on olemassa myös polkujen *homotopiaan* (eli ”jatkuvaan deformaatioon”) perustuva versio, joka on mm. Lehdon monisteessa. Homologinen lähestymistapa on kuitenkin monesti selkeämpi, tehokkaampi ja joustavampi. Esittämämme todistus lauseelle 10.10 noudattelee Rudinin oppikirjan mallia.