

Huom. 1. Tenttijällä saa olla A4-arkin kokoinen tiivistelmä mukanaan tentissä.

Huom. 2. Voit valita tehtävistä 4 ja 5 toisen. Ne ovat 8 pisteen arvoisia! Jos lasket molemmat, parempi ratkaisu huomioidaan arvostelussa.

1. Määrä seuraavan autonomisen systeemin kriittiset pisteet ja niiden laatu sekä anna systeemin yleinen ratkaisu:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -3x + y \\ \dot{y}(t) &= 4x - 3y + 5.\end{aligned}$$

2. Anna seuraavan systeemin yleinen ratkaisu:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ -6e^{-t} \end{bmatrix}.$$

3. Määrä seuraavan autonomisen systeemin kriittiset pisteet ja niiden laatu:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(x - y + 1) \\ \dot{y}(t) &= y(3x - y - 1).\end{aligned}$$

4. Tarkastellaan 1. kl. differentiaaliyhtälöä

$$y'(x)^2 + y(x)^2 = 1. \quad (1)$$

(a) Anna kaksi (1):n ratkaisua, jotka kumpikin toteuttavat alkuehdon $y(\pi/4) = 0$.

(b) Olkoon $B = B((\pi/4, 0), 1/2) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x - \pi/4)^2 + y^2 < 1/4\}$. Osoita, että alueessa B kulkee vain ne kaksi antamaasi AAT:n (1), $y(\pi/4) = 0$, ratkaisua.

(c) Onko (1):llä ratkaisua, joka toteuttaa (reuna)ehdot $y(-\pi/4) = 0$ ja $y(\pi) = 0$? Perustelu.

5. Tarkastellaan differentiaaliyhtälön alkuarvotehtävää

$$y'(x) = x(\sin y + 1), \quad y(0) = 0.$$

Olkoon $y : I \rightarrow \mathbf{R}$ sen (maksimaali)ratkaisu.

(a) Osoita, että $I = \mathbf{R}$, ts. että ratkaisu y on olemassa välillä \mathbf{R} .

(b) Osoita, että ratkaisu y on rajoitettu funktio.

(c) Määrä (perustellusti) $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$.