

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Analys II

Övning 1

För veckan som börjar 19. 1. 2009

Välkommen till kursen Analys II. Kursangelägenheter kan du diskutera personligen med föreläsaren eller ta upp under föreläsningen eller via e-post (erik.ramm-schmidt@helsinki.fi). Bekanta dig även med det nya Moodle-baserade arbetsunderlaget på <http://www.webalt.com/moodle/course/view.php?id=16> Där kan man bland annat skriva formler.

1. Vi betraktar två delningar av intervallet  $[0, 1]$ ,  $D_1 = \{0, 1/3, 1\}$  och  $D_2 = \{0, 2/3, 1\}$ . Ge ett exempel på en gemensam förtätning av dessa.

2. Låt  $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 1$  och  $D = \{-1, 0, 1, 2\}$ . Bestäm  $S_D$  och  $s_D$ .

3. Vi betraktar funktionen  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ , för vilken det gäller att  $f(x) = 0$  när  $x \neq 1$  och  $f(1) = 7$ . Ge ett exempel på en delning  $D$  av intervallet  $[0, 2]$ , för vilken  $S_D - s_D < 2^{-100}$ .

4. Vi betraktar funktionen  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x$ . Bestäm

$$\int_0^1 f(x) dx$$

med hjälp av definitionen av Riemannintegralen.

Tips: Använd delningen  $D = \{0, 1/n, 2/n, \dots, n/n\}$  och formeln  $\sum_{k=1}^n k = n(n+1)/2$ .

5. Anta att  $a > 0$ . Visa med hjälp av över- och undersummor med avseende på delningen  $D = \{0, a/n, 2a/n, \dots, a\}$  att

$$\int_0^a x^2 dx = a^3/3.$$

Tips: Tag en titt på exemplet på sida 2. Använd formeln  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ .

6. Anta att  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  är en avtagande funktion. Visa med hjälp av jämna delningsintervall och Riemanns villkor att  $f$  är integrerbar.

Tips: Gå igenom exempel 2.8 på sid 5 i kompendiet.