LINEAARISET MALLIT, 5 OP (aineopinnot). 12.3.–30.4.2009. Kirjallisuus: Pentti Saikkonen: Lineaarinen malli. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Harjoitukset 5 (to 16.4.)

1. Tarkastellaan HT 4.5:n mallia erikoistapauksessa $p = 1$, jolloin malliyhtälö on havaintoyksiköittäin ilmaistuna $Y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$, $i = 1, ..., n$, ja $\mathbf{X}$ on vektori $\mathbf{x} = [x_1 \ \cdots \ x_n]'$. Tutki PNS-estimaattorin $\hat{\beta}$ harhattomuutta, kun (i) $\mathbf{x} \perp\!\!\!\perp \boldsymbol{\varepsilon}$ ja (ii) $\mathbf{x}$ ja $\boldsymbol{\varepsilon}$ eivät ole riippumattomia. (*Huom.*: Oletetaan, että kaikki tarvittavat odotusarvot ovat äärellisinä olemassa.)

2. Tarkastellaan HT 4.5:n mallia yhden selittävän muuttujan lineaarisen regressiomallin tapauksessa, jolloin malliyhtälö on havaintoyksiköittäin ilmaistuna $Y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$, $i = 1, ..., n$. Merkitään $\hat{\boldsymbol{\beta}} = [\hat{\beta}_1 \ \hat{\beta}_2]'$ ja $\bar{x} = (x_1 + \cdots + x_n)/n$. (i) Muodosta Lauseen 2.1(i) tulosta käyttäen $\mathsf{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ ja edelleen $\mathsf{Var}(\hat{\beta}_2)$ ja $\mathsf{Var}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \bar{x})$. (ii) Oletetaan, että selittävien muuttujien arvot $x_1, ..., x_n$ voidaan valita vapaasti väliltä $[c, d]$. Miten ne on valittava, jos $\mathsf{Var}(\hat{\beta}_2)$ halutaan minimoida? Onko tämä valinta muuten järkevä? (*Huom.*: Kohdassa (ii) ei vaadita yksityiskohtaisia matemaattisia todistuksia. Niissä voit myös olettaa, että n on parillinen.)

3. Tarkastellaan lineaarista mallia $\mathbf{Y} \sim \mathsf{N}\left(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \mathbf{I}_n\right)$ ($\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p$, $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$, $\mathsf{r}(\mathbf{X}) = p$). Osoita, että parametrivektorin $\left[\boldsymbol{\beta}' \ \ \sigma^2\right]'$ Fisherin informaatiomatriisi

$$\mathbf{i}\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\right) = E\begin{bmatrix} -\partial^2 l\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2; \mathbf{Y}\right)/\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}' & -\partial^2 l\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2; \mathbf{Y}\right)/\partial\boldsymbol{\beta}\partial\sigma^2 \\ -\partial^2 l\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2; \mathbf{Y}\right)/\partial\sigma^2\partial\boldsymbol{\beta}' & -\partial^2 l\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2; \mathbf{Y}\right)/\partial\sigma^2\partial\sigma^2 \end{bmatrix}$$

on

$$\mathbf{i}\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\right) = \begin{bmatrix} \sigma^{-2}\mathbf{X}'\mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & n/2\sigma^4 \end{bmatrix}.$$

(*Vihje*: Kannattaa ehkä laskea ensin $\partial l\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2; \mathbf{y}\right)/\partial\boldsymbol{\beta}$ kuten $\partial \mathsf{S}(\boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\beta}$ monisteen s. 7 ja sen jälkeen $\partial^2 l\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2; \mathbf{y}\right)/\partial\boldsymbol{\beta}\partial\sigma^2$ ja edelleen vastaavan satunnaisvektorin odotusarvo. $\partial^2 l\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2; \mathbf{y}\right)/\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}'$ saadaan lasketuksi kuten $\partial^2 \mathsf{S}(\boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}'$ (ks. monisteen s. 8) ja $\partial^2 l\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2; \mathbf{y}\right)/\partial\sigma^2\partial\sigma^2$ vaatii pelkästään derivointia reaalisen muuttujan σ^2 suhteen. Huomaa myös symmetrisyys.)

4. Olkoon oikea (täysiasteinen) malli $\mathbf{Y} = \mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}$ ($\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathsf{N}\left(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I}_n\right)$, $\boldsymbol{\beta}_1 \in \mathbb{R}^{p_1}$, $\boldsymbol{\beta}_2 \in \mathbb{R}^{p_2}$, $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$). Oletetaan, että $\boldsymbol{\beta}_1$ estimoidaan kuitenkin käyttäen mallia, josta $\mathbf{X}_2$ on jätetty pois (eli malliyhtälö on $\mathbf{Y} = \mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_*$). Laske näin saadun $\boldsymbol{\beta}_1$:n PNS-estimaattorin odotusarvo ja selvitä myös sen todennäköisyysjakauma. Milloin tämä estimaattori on harhaton?

5. Tarkastellaan kahden riippumattoman normaalisen otoksen mallia

$$Y_1, ..., Y_n \;\perp\!\!\!\perp\;, \; Y_i \sim \begin{cases} \mathsf{N}\left(\mu_1, \sigma^2\right), & \text{kun } i = 1, ..., n_1 \\ \mathsf{N}\left(\mu_2, \sigma^2\right), & \text{kun } i = n_1 + 1, ..., n_1 + n_2 = n \end{cases}$$

(μ_1, $\mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$, n_1, $n_2 > 1$). Estimoi parametrit μ_1 ja μ_2 ehdolla $\mu_1 = \mu_2$ (i) käyttäen monisteessa (s. 16) esitettyä rajoitetun PNS-estimaattorin kaavaa (2.8) ja (ii) ottamalla ehto $\mu_1 = \mu_2$ huomioon mallissa ja estimoimalla saadun mallin parametrit (eli käyttäen olennaisesti yhtälöön (2.9) perustuvaa vaihtoehtoista menettelyä).

6. Jatkoa edelliselle. Mikä on parametrin σ^2 harhaton estimaattori ja sen jakauma, kun parametrien μ_1 ja μ_2 oletetaan toteuttavan rajoite $\mu_1 = \mu_2$? Entä mikä on σ^2:n harhaton estimaattori ja sen jakauma, kun μ_1 ja μ_2 ovat vapaasti vaihtelevia parametreja? (*Huom.*: Jälkimmäisessä kohdassa voit käyttää HT 4.5:ttä.)

7. Olkoon HT 4.2:n matriisi $\mathbf{A}$ lohkodiagonaalinen:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}.$$

Oletetaan, että $\mathbf{A}_{11}$ ja $\mathbf{A}_{22}$ ovat ei-singulaarisia neliömatriiseja. Osoita, että

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}^{-1} \end{bmatrix}.$$