LINEAARISET MALLIT, 5 OP (aineopinnot). 12.3.–30.4.2009. Kirjallisuus: Pentti Saikkonen: Lineaarinen malli. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Harjoitukset 4 (to 9.4.)

1. Tutkitaan yksinkertaista yhden selittäjän lineaarista regressiomallia $Y_i \sim \mathsf{N}\left(\beta x_i, \sigma^2\right)$, $i = 1, \ldots, n$. (Ainoa selittävä muuttuja ei ole tässä välttämättä vakio.)

Osoita käyttämättä monisteessa esitettyjä yleisiä matriisituloksia alla olevat väitteet.

a) PNS-estimaattori parametrille β

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

on harhaton ($\mathsf{E}(\hat{\beta}) = \beta$) ja lineaarinen. Sen varianssi on $\mathsf{Var}(\hat{\beta}) = \sigma^2 / \sum_{i=1}^n x_i^2$. (*Vihje:* Sijoita $\hat{\beta}$:n kaavaan $Y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$.)

b) Myös estimaattori

$$\tilde{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i}$$

on harhaton ja lineaarinen. Sen varianssi on $n\sigma^2/(\sum_{i=1}^n x_i)^2$. (*Vihje:* Sijoita $\tilde{\beta}$:n kaavaan $Y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$.)

c) $\mathsf{Var}(\tilde{\beta}) \geq \mathsf{Var}(\hat{\beta})$. Varianssit ovat yhtäsuuret ainoastaan, jos x_i, $i, \ldots, n$, on vakio, jolloin estimaattorit ovat yhtenevät ($\hat{\beta} = \tilde{\beta}$).

d) Tulkitse tuloksesi PNS- tai SU-estimaattorien teorian perusteella.

2. Ositetaan matriisi $\mathbf{A}$ $(m \times n)$ alimatriiseihin $\mathbf{A}_{ij}$ $(m_i \times n_j$, $i = 1, \ldots, q$ ja $j = 1, \ldots, p)$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{q1} & \cdots & \mathbf{A}_{qp} \end{bmatrix}.$$

Yllä $\sum_{i=1}^q m_i = m$ ja $\sum_{j=1}^p n_j = n$. Osoitetaan, että ositettujen matriisien yhteenlasku-, trasponointi- ja kertolaskusäännöt ovat hyvin samanlaiset kuin osittamattomien matriisien vastaavat säännöt.

a) Olkoon matriisi $\mathbf{B}$ myös dimensioltaan $m \times n$ ja ositettu vastaaviin alimatriiseihin $\mathbf{B}_{ij}$. Osoita, että

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1p} + \mathbf{B}_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{q1} + \mathbf{B}_{q1} & \cdots & \mathbf{A}_{qp} + \mathbf{B}_{qp} \end{bmatrix}$$

ja

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}' & \cdots & \mathbf{A}_{q1}' \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{1p}' & \cdots & \mathbf{A}_{qp}' \end{bmatrix}.$$

b) Olkoon matriisi $\mathbf{B}$ $(n \times r)$ ositettu alimatriiseihin $\mathbf{B}_{ij}$ $(n_i \times r_j,\ \sum_{j=1}^{s} r_j = r)$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{B}_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{B}_{p1} & \cdots & \mathbf{B}_{ps} \end{bmatrix}.$$

Osoita, että

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} \mathbf{A}_{1k}\mathbf{B}_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} \mathbf{A}_{1k}\mathbf{B}_{ks} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} \mathbf{A}_{qk}\mathbf{B}_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} \mathbf{A}_{qk}\mathbf{B}_{ks} \end{bmatrix}.$$

3. Merkitään $m \times n$ -matriisin $\mathbf{A}$ i:nnettä riviä $\mathbf{a}_i'$:lla $(1 \times n)$ ja j:nnettä saraketta $\mathbf{a}_{(j)}$:llä $(m \times 1)$, eli

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1' \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m' \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{a}_{(1)} \cdots \mathbf{a}_{(n)}]. \end{aligned}$$

Todista *r,s-sääntö* eli väitteet alla.

a) Matriisin $\mathbf{A}$ kertominen vasemmalta $m \times m$ -diagonaalimatriisilla $\mathbf{D}_v = \lceil d_1 \ldots d_m \rfloor$ tuottaa matriisin, jonka *i. rivi* on kerrottu d_i:llä:

$$\mathbf{D}_v\mathbf{A} = \begin{bmatrix} d_1\mathbf{a}_1' \\ \vdots \\ d_m\mathbf{a}_m' \end{bmatrix}.$$

b) Matriisin $\mathbf{A}$ kertominen oikealta $n \times n$ -diagonaalimatriisilla $\mathbf{D}_o = \lceil d_1 \ldots d_n \rfloor$ tuottaa matriisin, jonka *i. sarake* on kerrottu d_i:llä:

$$\mathbf{AD}_o = [d_1\mathbf{a}_{(1)} \cdots d_n\mathbf{a}_{(n)}].$$

4. (Jatkoa HT 2.1:lle.) (i) Johda HT 2.1:n varianssianalyysimallin parametrien $\mu_1, ..., \mu_p$ PNS-estimaattorien lausekkeet normaaliyhtälöiden ratkaisukaavaa käyttäen. (ii) Johda PNS-estimaattorien odotusarvot, varianssit ja kovarianssit (eli odotusarvovektori ja kovarianssimatriisi) ja osoita, että PNS-estimaattori $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \begin{bmatrix}\hat{\mu}_1 & \cdots & \hat{\mu}_p\end{bmatrix}'$ noudattaa multinormaalijakaumaa.

5. Tarkastellaan lineaarista mallia $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathsf{N}\left(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I}_n\right)$ ($\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p$, $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$, $\mathsf{r}(\mathbf{X}) = p$). Osoita, että residuaalivektorille $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ pätee $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{P})\,\boldsymbol{\varepsilon}$, jossa $\mathbf{P} = \mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'$ (ks. monisteen s. 9). Laske tämän ja liitteen A.1 tulosten avulla $\mathsf{E}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})$, $\mathsf{Cov}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})$ ja $\mathsf{Cov}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \hat{\boldsymbol{\beta}})$.

6. Jatkoa edelliselle tehtävälle. Osoita, että $\hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ ja että $\hat{\beta}_1 = \bar{y} - \hat{\beta}_2\bar{x}_2 - \cdots - \hat{\beta}_p\bar{x}_p$, kun mallissa on vakio eli $x_{i1} = 1$ kaikilla $i = 1, ..., n$. Tässä $\bar{x}_j = \left(x_{1j} + \cdots + x_{nj}\right)/n$, jossa x_{ij} on matriisin $\mathbf{X}$ yleinen alkio ($i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., p$), $\hat{\boldsymbol{\beta}} = [\hat{\beta}_1 \ \cdots \ \hat{\beta}_p]'$ ja muut merkinnät ovat kuten monisteessa (ks. s. 8-10).