LINEAARISET MALLIT, 5 OP (aineopinnot). 12.3.–30.4.2009. Kirjallisuus: Pentti Saikkonen: Lineaarinen malli. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Harjoitukset 2 (to 26.3.)

1. Olkoon $Y_{11}, ..., Y_{1n_1}, Y_{21}, ..., Y_{2n_2}, ..., Y_{p1}, ..., Y_{pn_p}$ riippumattomia ja $Y_{ji} \sim \mathsf{N}\left(\mu_j, \sigma^2\right)$, jossa $\mu_j \in \mathbb{R}$ ja $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$ (yksisuuntainen varianssianalyysimalli). Esitä tilanne lineaarisen mallin erikoistapauksena käyttäen lineaarisen mallin matriisiesitystä. Mikä on matriisin $\mathbf{X}$ aste?

2. Tarkastellaan aineistosta $y_1, ..., y_n$ laskettua otoskeskiarvoa $\bar{y} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} y_i$ ja otosvarianssia $s^2 = (n-1)^{-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$. Osoita, että

$$(n-1)\, s^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2 = \mathbf{y}'\left(\mathbf{I}_n - \mathbf{J}\right)\mathbf{y},$$

jossa $\mathbf{y} = [y_1 \ \cdots \ y_n]'$ ja $\mathbf{J} = \mathbf{1}_n \left(\mathbf{1}_n'\mathbf{1}_n\right)^{-1} \mathbf{1}_n'$ ($\mathbf{1}_n = [1 \cdots 1]'$, $n \times 1$). Osoita lisäksi, että $\mathbf{J}$ (ja siten $\mathbf{I}_n - \mathbf{J}$) on symmetrinen ja idempotentti (eli ortogonaalinen projektio) osoittamalla yleisesti, että matriisi $\mathbf{P} = \mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{X}'$ on symmetrinen ja idempotentti, kun $\mathbf{X}$ on astetta p oleva $n \times p$ -matriisi.

3. Olkoon matriisi $\mathbf{A}$ $(n \times n)$ positiivisesti definiitti. Osoita, että tällöin myös matriisi $\mathbf{A}^{-1}$ on positiivisesti definiitti. (*Vihje*: HT 1.4.) (Sovellusesimerkki: Jos kovarianssimatriisi $\mathbf{\Sigma}$ $(n \times n)$ on positiivisesti definiitti, niin myös $\mathbf{\Sigma}^{-1}$ on positiivisesti definiitti matriisi.)

4. Olkoon $\mathbf{X}$ täyttä sarakeastetta (p) oleva $n \times p$ -matriisi $(n > p > 0)$. Tällöin matriisi $\mathbf{P} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$ $(n \times n)$ on astetta p oleva (symmetrinen ja idempotentti) projektiomatriisi, joka projisoi $\mathbb{R}^n$:n vektorit (ortogonaalisesti) matriisin $\mathbf{X}$ sarakkeiden virittämään p-ulotteiseen avaruuteen $\mathcal{R}(\mathbf{X})$. Osoita, että matriisi $\mathbf{P} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$ on yksikäsitteinen eli että ei ole toista projektiomatriisia, joka (ortogonaalisesti) projisoi $\mathbb{R}^n$:n vektorit sarakeavaruuteen $\mathcal{R}(\mathbf{X})$. (*Vihje1*: Oleta, että on olemassa toinen projektiomatriisi $\mathbf{P}^*$ ja tutki erotusta $(\mathbf{P} - \mathbf{P}^*)\mathbf{y} = \mathbf{0}$. *Vihje2*: Valitse projisoitaviksi n-vektoreiksi yksi kerrallaan $\mathbf{e}_i' = [0 \ldots 0 \quad 1 \quad 0 \ldots 0]$, $i = 1, \ldots, n$. Edellä "1" on i. termi. *Vihje3*: Matriisin $\mathbf{A}$ $(n \times n)$ kertominen oikealta $\mathbf{e}_i$:llä tuottaa matriisin $\mathbf{A}$ i. sarakkeen $\mathbf{a}_{(i)}$.)

5.

a) Olkoon $\mathbf{A}$ kiinteä $n \times n$ -matriisi ja $\mathbf{y}$ n-vektori. Perustele huolellisesti derivointisääntö

$$\frac{\partial \mathbf{A}\mathbf{y}}{\partial \mathbf{y}'} = \mathbf{A}.$$

b) Laske monisteen sivulla 8 viitattu tulos (monisteen merkinnöillä)

$$\frac{\partial^2 \mathsf{S}(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}'} = 2\mathbf{X}'\mathbf{X}.$$

(*Vihje*: Sovella a)-kohdan derivointisääntöä.)