LINEAARISET MALLIT, 5 OP (aineopinnot). 12.3.–30.4.2009. Kirjallisuus: Pentti Saikkonen: Lineaarinen malli. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Harjoitukset 1 (to 19.3.)

1. Olkoot $\mathbf{Y}$ ja $\boldsymbol{\varepsilon}$ n-satunnaismuuttujavektoreita, $\mathbf{X}$ kiinteä $n \times p$ -havaintomatriisi ja $\boldsymbol{\beta}$ parametreista koostuva p-vektori $(n > p > 0)$. Merkitään matriisin $\mathbf{X}$ elementtejä x_{ij}:llä ja jäännösvektorin (virhevektorin) $\boldsymbol{\varepsilon}$ elementtejä ε_i:llä. Selitä huolellisesti merkinnät, yhtäsuuruudet ja matriisien ja vektorien dimensiot alla:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Y} &= \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \\
&= \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{p} x_{1i}\beta_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{p} x_{ni}\beta_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^{'}\boldsymbol{\beta} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^{'}\boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^{'} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^{'} \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{(1)} & \cdots & \mathbf{x}_{(p)} \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \\
&= \mathbf{x}_{(1)}\beta_1 + \cdots + \mathbf{x}_{(p)}\beta_p + \boldsymbol{\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

Selitä eritoten viimeisen ja kolmanneksi viimeisen yhtälön sisällöt sanoin.

2. Tutkitaan tehtävän 1 mallia jäännösvektorin ε multinormaalisuusoletuksella täydennettynä:

$$\mathbf{Y} \sim \mathsf{N}(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma_0^2 \mathbf{I}_n). \tag{1}$$

Olkoon havaintoja "paljon" (esim. $n = 10\,000$). Pohditaan, näyttävätkö havainnot y_i, $i = 1, \ldots, n$, aina normaalijakautuneilta.

a) Keksi erityistilanne, jossa havainnot y_i, $i = 1, \ldots, n$, selkeästi näyttävät noudattavan normaalijakaumaa.

b) Keksi erityistilanne, jossa havainnot y_i, $i = 1, \ldots, n$, selkeästi eivät näytä noudattavan normaalijakaumaa.

3. Symmetristä matriisia $\mathbf{A}$ $(n \times n)$ sanotaan positiivisesti definiitiksi (merkitään $\mathbf{A} > \mathbf{0}$), jos $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ kaikilla $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (ks. monisteen liite B.11). Osoita, että matriisi $\mathbf{A}$ $(n \times n)$ on positiivisesti definiitti jos ja vain jos sen ominaisarvot ovat positiivisia. Osoita edelleen, että positiivisesti definiitti matriisi on epäsingulaarinen (eli sillä on käänteismatriisi). (*Vihje*: Voit käyttää symmetrisen matriisin pääakselihajotelmaa, ks. monisteen liite B.6.)

Huomaa, että tämän todistuksen loppu koskee yleisempää muotoa olevaa matriisia kuin luennolla käsitellyssä todistuksessa (jossa matriisi oli $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ ja $\mathbf{X}$ oli täysiasteinen).

4. Olkoon $\mathbf{A}$ $(n \times n)$ positiivisesti definiitti ja $\mathbf{B}$ $(n \times k)$ astetta k oleva matriisi (eli $\mathbf{B}$:n sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomat, ks. monisteen liite B.9). Osoita, että $\mathbf{B}'\mathbf{A}\mathbf{B}$ on positiivisesti definiitti ja siten epäsingulaarinen.

5. Olkoon neliömatriisi $\mathbf{A}$ $(n \times n)$ idempotentti eli $\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}$ (merkitään $\mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{A}^2$, ks. monisteen liite B.10). Osoita, että $\mathbf{I}_n - \mathbf{A}$ on myös idempotentti ja että $\mathbf{A}$:n ominaisarvot ovat nollia ja ykkösiä. (*Vihje*: Ominaisvektorit määrittävä yhtälö, ks. monisteen liite B.6.)

6. Neliömatriisin jälki on sen diagonaalialkioiden summa eli, jos $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ on $n \times n$ -matriisi, niin sen jälki on $\mathsf{tr}\,(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Osoita, että (i) $\mathsf{tr}\,(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathsf{tr}\,(\mathbf{A}) + \mathsf{tr}\,(\mathbf{B})$ (ii) $\mathsf{tr}\,(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \mathsf{tr}\,(\mathbf{B}\mathbf{A})$ ja (iii) $\mathsf{tr}\,(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$:n ominaisarvojen summa, kun $\mathbf{A}$ on symmetrinen. (*Vihje*: Viimeisessä kohdassa voit käyttää symmetrisen matriisin pääakselihajotelmaa, ks. monisteen liite B.6.)