

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Stokastiset prosessit

Harjoitus 2

30.05.2008

1. Esitä tapahtuma  $\{T_A = n\}$  ketjun koko historian avulla, kun lähtötilanne on  $X_0 = i$ . Esitä myös tapahtuman  $\{T_A = n\}$  todennäköisyys käyttämällä yleistettyjä siirtymätodennäköisyyksiä. [Vertaa luentojen kaavaa (2.11)]

2. Tarkastellaan Markovin ketjua, jonka tilajoukko on  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  ja siirtymätodennäköisyysmatriisi on

$$P = \begin{pmatrix} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & & \frac{1}{3} & \\ & 1 & & \\ \frac{7}{8} & & \frac{1}{8} & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \end{pmatrix}$$

a) Piirrä ketjun tiladiagrammi

b) Hae kaikki absorptiojoukot

a) Määrä absorptiotodennäköisyydet kaikista tiloista  $i$  absorptiojoukkoihin  $A$

3. Tarkastellaan luentojen rahapeliesimekkiä. Oletetaan, että pelaajalla  $A$  on alussa  $i$  euroa ja pelaajalla  $B$  on  $d-i$  euroa. Laske todennäköisyys sille, että pelaaja  $A$  häviää pelin. Luonnostelee myös häviötodennäköisyyden kuvaaja alkupääoman  $i$  funktiona tapauksissa  $p = q = \frac{1}{2}$  sekä  $p = \frac{3}{4}$  ja  $q = \frac{1}{4}$ . [Vihje. Sovella luentojen esimerkkiä ja tietoa  $h_d = 0$ .]

4. Näytä, että jokaisella ajanhetkellä  $n, \hat{n}$  ja  $m$  on

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(X_{n+m} = i_{n+m}, \dots, X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) \\ &= \mathbf{P}(X_{\hat{n}+m} = i_{n+m}, \dots, X_{\hat{n}+1} = i_{n+1} \mid X_{\hat{n}} = i_n). \end{aligned}$$

[Vihje: Polkutodennäköisyyden kaava]

5. Tarkastellaan SK-ketjua  $(X_n)$  luonnollisilla luvuilla  $\mathbb{N}$ . Merkitään  $T_i = \min\{ n \in \mathbb{N} : X_n = i \}$  (Huom. jos  $i \neq 0$ , niin  $T_i$  on ensimmäinen osumishetki, mutta ei absorptiohetki). Näytä, että

$$\mathbf{P}_2(T_0 = n) = \sum_{0 < m < n} \mathbf{P}_2(T_1 = m) \mathbf{P}_1(T_0 = n - m).$$

Olkoon  $G_i(t) := \mathbf{E}_i t^{T_0}$  ja  $H_{ij}(t) := \mathbf{E}_i t^{T_j}$ . Näytä edellisen identiteetin avulla, että

$$G_2(t) = H_{21}(t)G_1(t).$$