

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I

Harjoitus 9

17. 11. 2008 alkavalle viikolle

Näissä harjoituksissa saa käyttää kaikkia koulusta tuttuja koulusta tuttujen funktioiden ominaisuuksia kuten sinin jne. jatkuvuutta ja derivointisääntöä.

1. Määritellään $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ yhtälöllä $f(x) = x|x|$. Millä x on olemassa derivaatta $f'(x)$? Entä toinen derivaatta $f''(x)$? Entä kolmas derivaatta $f'''(x)$?

2. Derivoi

(a) $\sin^3 x^4$;

(b) $\sin^2(\sin^3 x^4)$;

(c) $\sqrt{\sin^2(\sin^3 x^4) + 1}$.

3. Tarkastellaan funktiota $f :]0, 2[\rightarrow]1, 37[$, jolle pätee $f(x) = x^5 + x^2 + 1$ kaikilla $x \in]0, 2[$. Miksi sillä on aidosti kasvava (jatkuva) ja derivoituva käänteisfunktio $g :]1, 37[\rightarrow]0, 2[$. Määritä $g'(3)$. Vihje: laske ensin $f(1)$.

4. Oletetaan, että $f'(1) = 2$. Selvitä raja-arvo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-2h)}{h}.$$

Vihje: täydennä tutkittava lauseke muotoon, missä esiintyvät erotusosamäärän muodot

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} \quad \text{ja} \quad \frac{f(1-2h) - f(1)}{-2h}.$$

5. Miten yhtälöstä $(7+h)^4 = 7^4 + 4 \times 7^3 \times h + 6 \times 7^2 \times h^2 + 4 \times 7 \times h^3 + h^4$ voidaan karakterisointilauseen avulla päätellä funktion $f(x) = x^4$ derivaatta kohdassa $x = 7$?

6. Oletetaan, että $p > 0$. Osoita, että yhtälöllä $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ on enintään kaksi erisuurta reaaliuurta. Vihje: Merkitse yhtälön vasen puoli $= f(x)$. Osoita ensin toisen derivaatan avulla, että f' on aidosti kasvava. Sovella sitten Rollen lausetta yhtälön peräkkäisten juurten välissä.