

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I

Harjoitus 7

3. 11. 2008 alkavalle viikolle

LISÄPISTEITÄ JAOSSA

Laskuharjoituksista: 4 pistettä, jos laskettu vähintään 50 tehtävää; 3 pistettä, jos laskettu alle 50 mutta vähintään 40 kpl; 2 pistettä, jos laskettu alle 40 mutta vähintään 30 kpl; ja 1 piste, jos laskettu alle 30 mutta vähintään 20 kpl syksyn tehtävistä.

Ohjauksista: 2 pistettä, jos 3. 11. alkaen on osallistunut 5 - 6 viikon ohjauksiin ja 1 piste, jos osallistunut 3 - 4 viikon ohjauksiin.

1. Selvitä lauseen 5.4 avulla

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x^2 + 5x}{7x^2 + 9}.$$

2. Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1} = 2.$$

3. Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x \rightarrow 7^+} \frac{x + 7}{x - 7} = \infty.$$

4. Onko olemassa $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$? Koulusta tuttuja sinifunktion ominaisuuksia saa tietysti käyttää.

5. Oletetaan, että $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Määritellään jokaisella $\alpha > 0$ funktio $g_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ehdolla $g_\alpha(x) = f(x) + \alpha x$. Oletetaan, että jokainen funktioista g_α on aidosti kasvava. Osoita, että f on kasvava.

6. Oletetaan, että $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ toteuttaa ehdot $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 1$. Osoita, että on olemassa sellainen $h > 0$, että kaikilla x pätee: jos $0 < x < h$, niin $(1 - \frac{1}{7})x < f(x) < (1 + \frac{1}{7})x$. (Kannattaa soveltaa funktion raja-arvon määritelmää erotusosamäärään $E(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. Kun $|x|$ kyllin pieni (ja $x \neq 0$), niin $|E(x) - 1| < \frac{1}{7} \dots$) Kannattaa piirtää kuva!