Analýza I, kat. 2, zkouška 2008

T. V.

1. a) $|3x-6|<1$

$\Leftrightarrow -1<3x-6<1$

$\Leftrightarrow -1+6<3x-6+6<1+6$

$\Leftrightarrow 5<3x<7 \Leftrightarrow 5/3<x<7/3$ $\left(\Leftrightarrow x\in\left]\frac{5}{3},\frac{7}{3}\right[\right)$

b) $0<|3x-6|<1$

$\Leftrightarrow -1<3x-6<1 \ \& \ 3x-6\neq 0$

$\Leftrightarrow 5<3x<7 \ \& \ 3x\neq 6$

$\Leftrightarrow 5/3<x<7/3 \ \& \ x\neq 2$

$\Leftrightarrow x\in\left]5/3,\frac{7}{3}\right[\setminus\{2\}$ $\left(\Leftrightarrow x\in\left]\frac{5}{3},2\right[\cup\left]2,\frac{7}{3}\right[\right)$

2. Dl. $|x-e|<2^{-100}$ & $|y-\pi|<2^{-100}$

Tvrdíme $|(x+y)-(e+\pi)|=|(x-e)+(y-\pi)|$

$\overset{\Delta-\text{n.}}{\leq}|x-e|+|y-\pi|<2^{-100}+2^{-100}$

$=2\cdot 2^{-100}=2^{-99}$

3. Etsi (jokin) luku $K > 0$ s.e.

$$(I)\quad \left|\frac{x+5}{2x+7} - \frac{7}{11}\right| \le K|x-2| \quad \forall x \in]1,3[.$$

$$(I) \Leftrightarrow \left|\frac{11(x+5) - 7(2x+7)}{11(2x+7)}\right| \le K|x-2|$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{-3x+6}{11(2x+7)}\right| = \frac{|-3(x-2)|}{|11(2x+7)|} = \frac{|-3||x-2|}{|11(2x+7)|}$$

$$= \frac{3|x-2|}{11|2x+7|} \le K|x-2|$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{11|2x+7|} \le K \quad \text{s. } |x-2| = 0$$

$$\Leftrightarrow K \ge \frac{3}{11(2x+7)} \qquad (\text{koska } x \in]1,3[, \text{ on } 2x+7 > 2\cdot 1 + 7 > 0)$$

$\Rightarrow$ " s. $x = 2$

joka pätee, kun

$$K \ge \frac{3}{11(2\cdot 1+7)} \overset{\uparrow}{\ge} \frac{3}{11(2x+7)}$$
$$K > 1$$

$$\Leftrightarrow K \ge \frac{3}{11\cdot 9} = \frac{1}{33}$$

Siis jos esim. $K \ge \frac{1}{33}$, pätee (I)

$\forall x \in]1,3[$.

4. Ol. $|x-3|<7^{-13}$. Onko siitä (siis $\forall x$ jotka tät. oletuksen) $|x^2-9|<7^{-12}$?

Ol. $\overset{\Delta\text{-e.y.}}{\Rightarrow} |x+3| = |x-3+6| \le |x-3|+|6|$

$\overset{\text{ol.}}{\le} 7^{-13}+6 < 1+6 = 7$ (*)

$\Rightarrow |x^2-9| = |(x+3)(x-3)| = |x+3||x-3| \overset{(*)}{\le} 7|x-3|$

$\overset{\text{ol.}}{<} 7\cdot 7^{-13} = 7^{-12}$ Siis vastaus: On.

5. Etsi' $h>0$ s.e. $|x^2-9|<10^{-100}$, kun $|x-3|<h$.

Ol. $0<h<1$. $\Rightarrow |x+3| = |x-3+6| \le \underbrace{|x-3|}_{<h<1}+6<7$

$\Rightarrow |x^2-9| = |x+3||x-3| < 7|x-3|$

$< 7h < 10h = 10^{-100}$, kun $h = 10^{-101}$.

Siis yksi val. (esim.) $h = 10^{-101}$ (jolloin myös $h<1$), jatke:

$|x-3|<h \Rightarrow |x^2-9| < 10^{-100}$.

6. Etsi' $h>0$ s.e. $|x-9|<h \Rightarrow |\sqrt{x}-3|<10^{-100}$.

Ratk.: $|\sqrt{x}-3| = \left|\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}+3}\right| = \frac{|x-9|}{\underbrace{|\sqrt{x}+3|}_{\ge 0}} = \frac{|x-9|}{\sqrt{x}+3} \le \frac{|x-3|}{3}$

$< 10^{-100}$, kun $|x-9| < \underbrace{3\cdot 10^{-100}}_{=:h}$

Siis riittää valita $h = 3\cdot 10^{-100}$.