Analyysi I, harj. 9

1. Olk. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x|x|$

1° $\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ (Kuten koulussa on jo opittu)

$$f'(x) = \begin{cases} Dx^2 = 2x, & x > 0 \\ D(-x^2) = -2x, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} 2, & x > 0 \\ -2, & x < 0 \end{cases}$$

$$\& \quad f'''(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} = 0, \ x \neq 0$$

(Nämä voisi myös johtaa erotusosamäärästä:
Esim., kun $|h| < |x|$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)|x+h| - x|x|}{h}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \dfrac{2xh + h^2}{h} = 2x + h \to 2x, & x, x+h > 0 \\ \dfrac{-(x+h)^2 - (-x^2)}{h} = \dfrac{-2xh - h^2}{h} = -2x - h \to -2x, & x, x+h < 0 \end{cases} \Bigg)$$

$x = 0$:

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h|h| - 0|0|}{h} = |h| \xrightarrow[h \to 0]{} 0 = f'(0)$$

$$\frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \frac{2|h| - 0}{h} = \begin{cases} 2h/h = 2 \xrightarrow[h \to 0+]{} 2 \\ -2h/h = -2 \xrightarrow[h \to 0-]{} -2 \end{cases}$$

$\Rightarrow f''(0) \nexists \Rightarrow f'''(0) \nexists$, sillä $\dfrac{f''(0+h) - f''(0)}{h}$ ei ole määritelty. Siis

$f'(x) = 2|x| \ \forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \begin{cases} 2, & x > 0 \\ -2, & x < 0 \end{cases}$, $f'''(x) = 0, \ x \neq 0$

& $f''(0) \nexists$ & $f'''(0) \nexists$

2. a) $D\sin^3(x^4) = 3\sin^2(x^4)\,D\sin(x^4)$

$= 3\sin^2(x^4)\cos(x^4)\,Dx^4 = 3\sin^2(x^4)\cos(x^4)\,4x^3$

$= 12\sin^2(x^4)\cos(x^4)\,x^3$

b) $D\sin^2(\sin^3(x^4)) = 2\sin(\sin^3(x^4))\,D\sin^3(x^4)$

$\overset{a)}{=} 2\sin(\sin^3(x^4))\,12\sin^2(x^4)\cos(x^4)\,x^3$

$= 24\sin(\sin^3(x^4))\sin^2(x^4)\cos(x^4)\,x^3$

c) $D\sqrt{\sin^2(\sin^3(x^4))+1}$

$= D\left(\sin^2(\sin^3(x^4))+1\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}\left(\sin^2(\sin^3(x^4))+1\right)^{-\frac{1}{2}} D\left(\sin^2(\sin^3(x^4))+1\right)$

$= \frac{1}{2}\sqrt{\sin^2(\sin^3(x^4))+1}^{\,-1}\cdot\left(D\sin^2(\sin^3(x^4))+0\right)$

$\overset{b)}{=} \frac{1}{2}\sqrt{\sin^2(\sin^3(x^4))+1}^{\,-1}\cdot 24\sin(\sin^3(x^4))\sin^2(x^4)$
$\cdot\cos(x^4)\,x^3$

$= 12\sqrt{\sin^2(\sin^3(x^4)+1}^{\,-1}\cdot\sin(\sin^3(x^4))\sin^2(x^4)\cos(x^4)\,x^3$

$= \dfrac{12x^3}{\sqrt{\sin^2(\sin^3(x^4))+1}}\sin(\sin^3(x^4))\sin^2(x^4)\cos(x^4)$

3. Olk. $f:]0,2[\to]1,37[$, $f(x) = x^5 + x^2 + 1$

1° $\Rightarrow f'(x) = \underbrace{5x^4}_{\geq 0} + \underbrace{2x}_{> 0} > 0 \quad \forall x \in]0,2[$,

joten L 8.6 $\Rightarrow$ f on aidosti kasvava $]0,2[$:ssa.

Tällöin L 6.9. $\Rightarrow$ f määrittelee bijektion

$f_1 :]0,2[\to f]0,2[$ & koska f on jatkuva, on

$f]0,2[$ väli. Koska $\lim_{x \to 0+} f(x) = 1$ & $\lim_{x \to 2-} f(x) = 37$,

$]1,37[\subset f]0,2[$. Toisaalta $\forall x \in]0,2[$,

$1 < f(x) < 37$, joten $f]0,2[\subset]1,37[$. Siis

$f]0,2[=]1,37[$ & f on bijektio.

2° $g'(3)$: $f(1) = 1^5 + 1^2 + 1 = 3$ ($1 \in]0,2[$ on

välin $]0,2[$ sisäpiste) & $f'(1) = 5 \cdot 1^4 + 2 \cdot 1 = 7 \neq 0$

Nyt L 7.4. $\Rightarrow$ käänteisfunktiolla

$g = f^{-1} :]1,37[\to]0,2[$ on pisteessä $3 = f(1)$

derivaatta & $g'(3) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{7}$.

Analyysi I, 9

4. Ol. $f'(1) = 2$.

$$\left(\Rightarrow \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 2 \right.$$

$$\left. \& \quad \frac{f(1-2h) - f(1)}{-2h} \xrightarrow[-2h\to 0]{} 2 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{f(1+h) - f(1-2h)}{h}$$

$$= \frac{f(1+h) - f(1) + f(1) - f(1-2h)}{h}$$

$$= \frac{f(1+h) - f(1)}{h} - \frac{f(1-2h) - f(1)}{h}$$

$$= \frac{f(1+h) - f(1)}{h} + 2\,\frac{f(1-2h) - f(1)}{-2h}$$

$$\xrightarrow[h\to 0]{} f'(1) + 2f'(1) = 2 + 2\cdot 2 = 6$$

Analyysi I, 7

5. Olk. $f(x) = x^4$

Tällöin

$$(7+h)^4 = 7^4 + 4\cdot 7^3 h + 6\cdot 7^2 h^2 + 4\cdot 7 h^3 + h^4$$

$$\Leftrightarrow \quad f(7+h) = f(7) + \underbrace{4\cdot 7^3}_{\equiv a} h + h\underbrace{(6\cdot 7^2 h + 4\cdot 7 h^2 + h^3)}_{\equiv \varepsilon(h)}$$

missä ($4\cdot 7^3 h$ on h:n suhteen 1. asteen $\mathcal{L}$)

$$\varepsilon(h) = 6\cdot 7^2 h + 4\cdot 7 h^2 + h^3 \xrightarrow[h\to 0]{} 6\cdot 7^2\cdot 0 + 4\cdot 7\cdot 0 + 0^3 = 0,$$

joten karakt. lauseen mukaan

$$f'(7) = a = 4\cdot 7^3 = 4\cdot 343 = \underline{1369}$$

6 Ol. $p > 0$. Tällöin yhtälöllä

(*) $x^4 + px^2 + qx + r = 0$

on enintään kaksi erisuurta reaalijuurta.

Tod. Merk. $f(x) = x^4 + px^2 + qx + r$

$\Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 2p x + q \Rightarrow f''(x) = \underbrace{12x^2}_{\geq 0} + \underbrace{2p}_{> 0} > 0$.

$\Rightarrow f'$ on aidosti kasvava $\mathbb{R}$:ssä.

Vastaol.: Yhtälöllä (*) on ainakin kolme erisuurta reaalijuurta. Merk. kolmea peräkkäistä juurta a, b, c, $a < b < c$.

Rolle $\Rightarrow \exists \xi_1 \in]a,b[$ & $\exists \xi_2 \in]b,c[$ s.e.

$f'(\xi_1) = 0$ & $f'(\xi_2) = 0 \Rightarrow f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$

Toisaalta $\xi_1 < b < \xi_2 \Rightarrow \xi_1 < \xi_2$ & koska f' on aidosti kasvava, on siis $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$

R.R. $\square$