HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia Ib
Kurssikoe 14.5.2018
Sallitut apuvälineet: Ei apuvälineitä.

Näissä tehtävissä euklidisella avaruudella $\mathbb{R}^n$ tarkoitetaan normiavaruutta $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$, missä $n \in \mathbb{N}$ ja $|\cdot|$ on normi

$$|(x_1, x_2, \ldots, x_n) - (y_1, y_2, \ldots, y_n)| = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2)^{1/2}$$

kaikilla $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$ merkitään

$$B^n(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \colon |x - y| < r\} \text{ ja } \bar{B}^n(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \colon |x - y| \leq r\}.$$

t1. (6p.) Osoita, että euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^2$ osajoukko

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| = |y|, \ -1 \leq y \leq 1\}$$

on kompakti.

t2. (a) (3p) Osoita, että euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^3$ osajoukko

$$A_1 = B^3((1,0,0),1) \cup B^3((-1,0,0),1)$$

on epäyhtenäinen.

(b) (3p) Osoita, että euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^3$ osajoukko

$$A_2 = \bar{B}^3((1,0,0),1) \cup \bar{B}^3((-1,0,0),1)$$

on yhtenäinen.

t3. (6p.) Olkoon (X,d) kompakti metrinen avaruus ja olkoon d' joukon X metriikka, joka on ekvivalentti metriikan d kanssa. Osoita, että metrinen avaruus (X,d') on kompakti.

t4. (6p.) Olkoot (X,d) täydellinen metrinen avaruus, $L \geq 1$ ja $f \colon X \to \mathbb{R}^n$ L-bilipschitz kuvaus, eli kuvaus, joka toteuttaa ehdon

$$\frac{1}{L} d(x,x') \leq |f(x) - f(x')| \leq L d(x,x')$$

kaikilla $x, x' \in X$. Osoita, että kuvajoukko $fX \subset \mathbb{R}^n$ on suljettu.