HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia Ia
Kurssikoe 8.3.2018
Sallitut apuvälineet: Ei apuvälineitä.

Näissä tehtävissä euklidisella avaruudella $\mathbb{R}^n$ tarkoitetaan metristä avaruutta $(\mathbb{R}^n, d)$, missä $n \in \mathbb{N}$ ja d on euklidinen metriikka

$$d((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2)^{1/2}$$

kaikilla $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

t1. (6p.) Olkoon $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^2 \to [0, \infty[$ funktio, joka on määritely kaavalla

$$\|(x, y)\| = |x| + 2|y|$$

kaikilla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Osoita, että $\|\cdot\|$ on normi vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^2$.

t2. (6p.) Olkoon $A =]-1, 1[\times]-1, 1[\subset \mathbb{R}^2$. Osoita, että A on euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^2$ avoin joukko.

t3. (6p.) Olkoon $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{(1, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$. Määritä joukon A sulkeuma $\overline{A}$ euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

t4. (6p.) (Teoriatehtävä) **Todista lause:** Olkoot (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia. Tällöin kuvaus $f\colon X \to Y$ on jatkuva, jos ja vain jos jokaisen avoimen joukon $U \subset Y$ alkukuva $f^{-1}U \subset X$ on avoin.