HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaaliyhtälöt II (MAT21013)
Kurssikoe 19.12.2017

Kokeen kesto on kaksi ja puoli tuntia.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukkokirjoja.

Ratkaise seuraavat tehtävät 1, 2, 3 ja 4. Jokaisesta tehtävästä saa enintään 6 pistettä.

1. Olkoon $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Oletetaan, että $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuvasti derivoituva funktio jolle
$$g'(x) \leq p(x)g(x)$$
kaikille $x \geq 0$. Näytä, että
$$g(x) \leq g(0)e^{\int_0^x p(t)\,dt}$$
kaikille $x \geq 0$.

2. Olkoot $\mathbf{x}_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ja $\mathbf{x}_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ differentiaaliyhtälösysteemin
$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$$
ratkaisuja, missä
$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \end{bmatrix}, \quad \text{ja} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Olkoon $W(t) = W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)(t)$ vektorifunktioiden $\mathbf{x}_1$ ja $\mathbf{x}_2$ Wronskin determinantti, eli,
$$W(t) = W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)(t) = \det[\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)] = \det \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{bmatrix}.$$
Osoita, että
$$W'(t) = 2W(t).$$

3. Ratkaise
$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t),$$
missä
$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. Ratkaise
$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t),$$
missä
$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$