

1. Ovatko seuraavat kaksi verkkoa keskenään isomorfiset? Perustele vastauksesi!

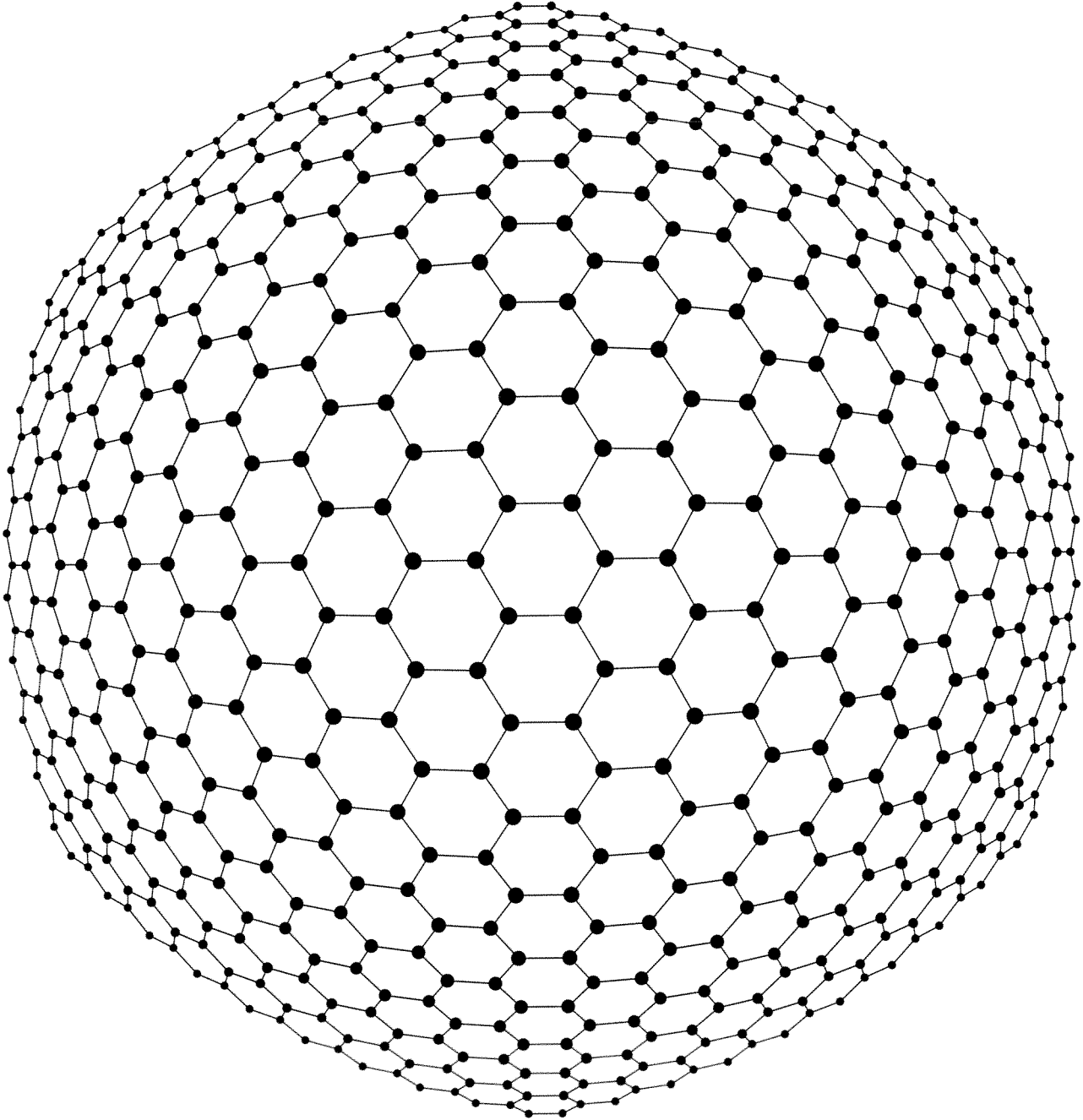


2. Tarkastellaan paperin kääntöpuolelle kuvattua 600-pisteistä verkkoa.
- Laske verkon viivojen lukumäärä. Pelkkä vastaus ei riitä, näytä myös laskut!
 - Onko verkolla vahvasti yhtenäinen yksisuuntaistus? Perustele vastauksesi!
3. Määrittellemme suhteikon S asettamalla $P_S = [12]$ ($= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$) ja $N_S = \{\overline{xy} : x, y \in [12], x + y \neq 11 \text{ ja joko } y - x = 1 \text{ tai } x - y = 2\}$.
 Perustele vastauksesi seuraaviin kysymyksiin.
- Onko suhteikolla S juurta?
 - Mikä on S :n vahvasti yhtenäisten komponenttien lukumäärä?
 - Onko S :ssä Hamiltonin kulkua?
- [Ohje: Piirrä suhteikosta kuva, jossa pisteiden joukko on jaettu kahteen eri osaan lukujen parillisuuden mukaan.]

4. Määrittellemme verkon G asettamalla

$$P_G = \mathcal{P}[5] \text{ (} = \{A : A \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}\} \text{)} \text{ ja } V_G = \{\overline{AB} : A, B \in \mathcal{P}[5] \text{ ja } A \cap B = \emptyset\}.$$

Onko verkossa G Eulerin kulkua? Perustele vastauksesi!



Matematiikan ja tilastotieteen laitos

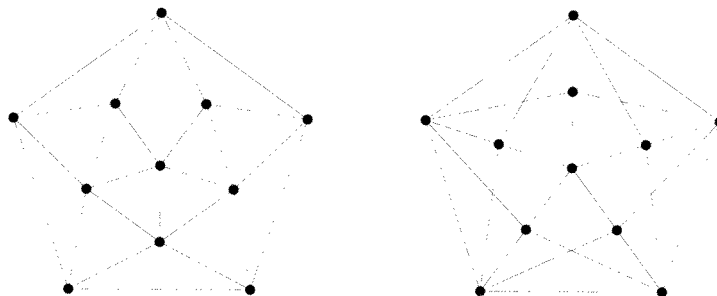
Verkot

Kurssikoe

18.12.2007 klo 12–14

Huom: Koeaika on kaksi tuntia!

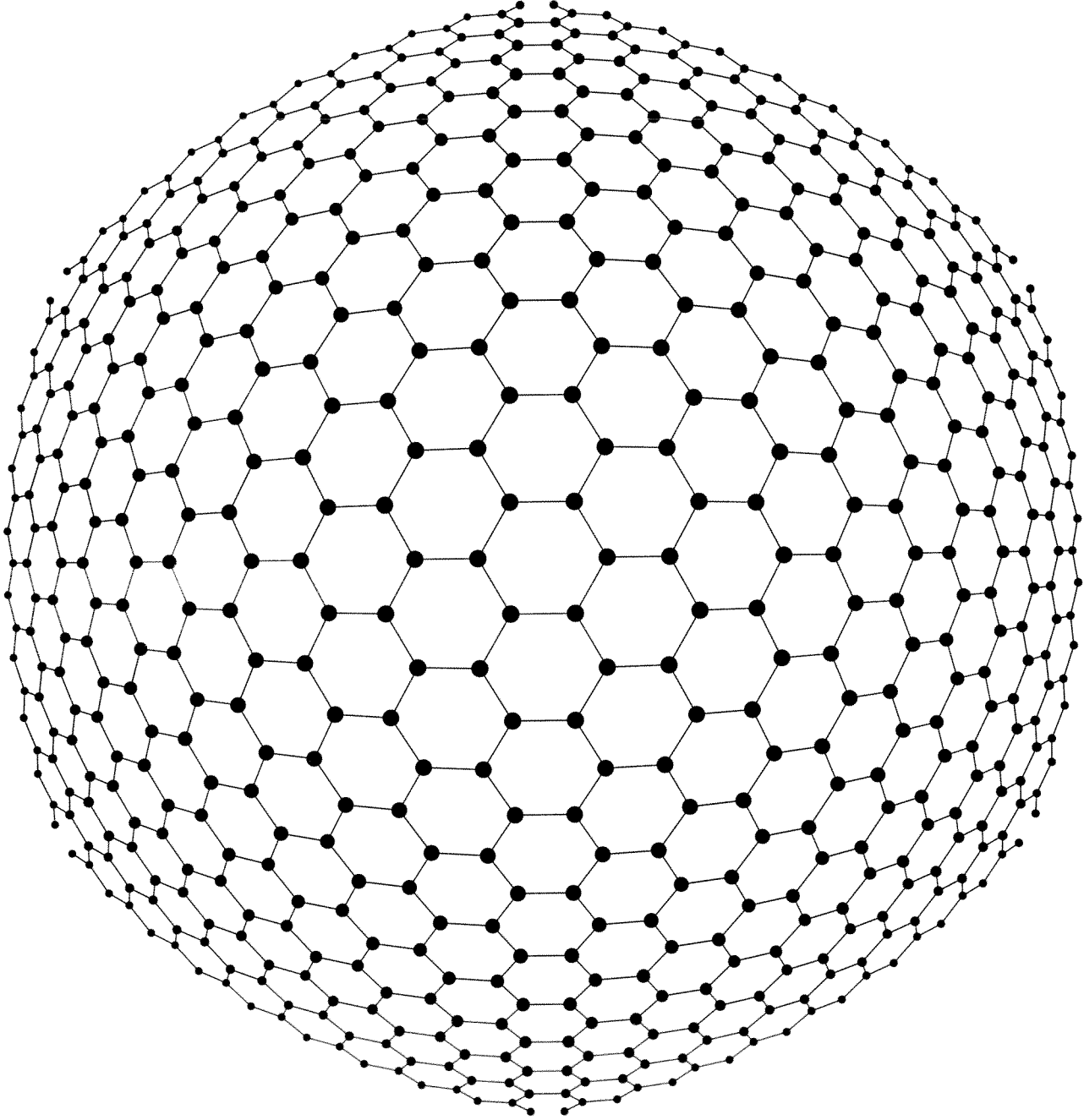
1. Ovatko seuraavat kaksi verkkoa keskenään isomorfiset? Perustele vastauksesi!



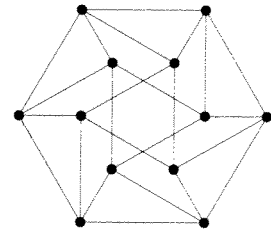
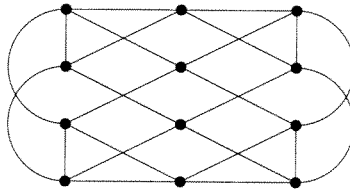
2. Tarkastellaan paperin kääntöpuolelle kuvattua 600-pisteistä verkkoa.
- (a) Laske verkon viivojen lukumäärä. Pelkkä vastaus ei riitä, näytä myös laskut!
 - (b) Onko verkolla vahvasti yhtenäinen yksisuuntaistus? Perustele vastauksesi!
3. Määrittelimme suhteikon S asettamalla $P_S = [11]$ ($= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$) ja $N_S = \{\overrightarrow{xy} : x \in [11], y \in [11], x \cdot y \leq 100 \text{ ja joko } x - y = 1 \text{ tai } y - x = 2\}$. Perustele vastauksesi seuraaviin kysymyksiin.
- (a) Onko suhteikolla S juurta?
 - (b) Määritä S :n vahvasti yhtenäisten komponenttien pistejoukot?
 - (c) Onko S :ssä Hamiltonin kulkua?
- [Ohje: Piirrä suhteikosta kuva, jossa pisteiden joukko on jaettu kahteen eri osaan lukujen parillisuuden mukaan.]
4. Määrittelimme verkon G asettamalla

$$P_G = \mathcal{P}[8] (= \{A : A \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}\}) \text{ ja } V_G = \{\overline{AB} : A, B \in \mathcal{P}[8], A \neq B \text{ ja } A \cup B = [8]\}.$$

Onko verkossa G Eulerin kulkua? Perustele vastauksesi!

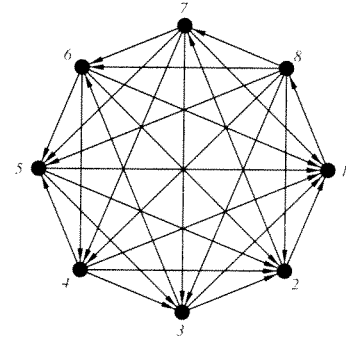
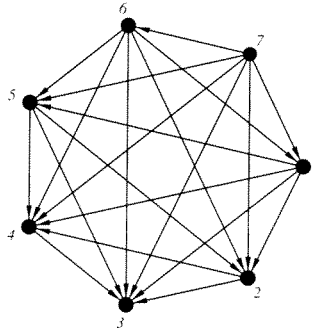


1. Ovatko vieressä kuvatut verkot keskenään isomorfiset? Perustele vastauksesi!

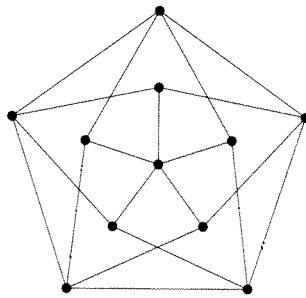


2. Tarkastellaan paperin kääntöpuolelle kuvattua 300-pisteistä verkkoa.
 (a) Laske verkon viivojen lukumäärä. Pelkkä vastaus ei riitä, näytä myös laskut!
 (b) Onko verkolla vahvasti yhtenäinen yksisuuntaistus? Perustele vastauksesi!

3. Etsi Hamiltonin kulut vieressä kuvatuista täydellisistä suhteikoista. Löytyykö kummastakaan suhteikosta Hamiltonin kierrosta? Jos löytyy, niin etsi sellainen.

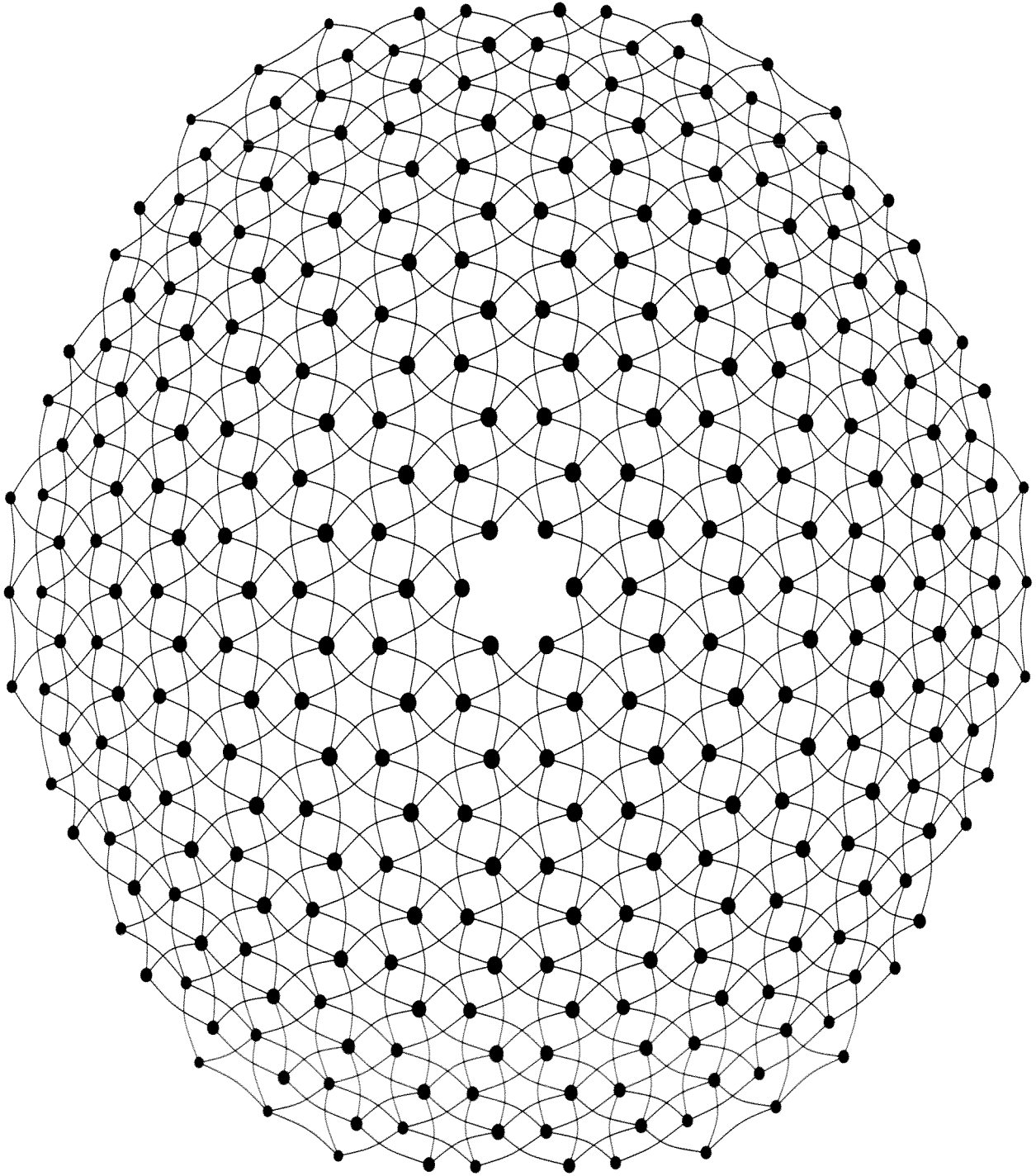


4. Seuraavassa esitetään kolme verkkoja koskevaa väitettä. Perustele lyhyesti kussakin tapauksessa, päteekö väite vai ei alla kuvatulle *Grötzschin verkolle*.

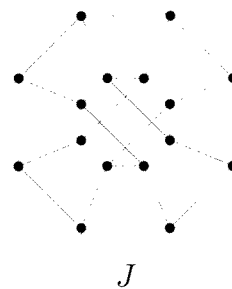
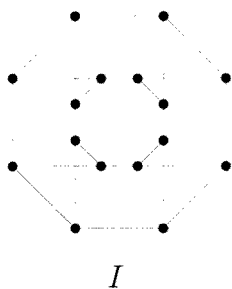
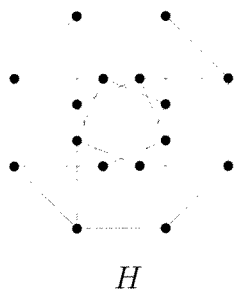


- (a) Jos verkon kukin piste värjätään joko siniseksi, punaiseksi, keltaiseksi tai vihreäksi, niin jotkut kaksi vierekkäistä pistettä saavat saman värin.
 (b) Verkossa on kaksi rengasta, joilla ei ole yhteisiä pisteitä.
 (c) Verkossa on Eulerin kulku.

5. Puun T jokaisen pisteen aste on pienempi kuin 4. Näytä, että T :n lehtien lukumäärän ℓ ja T :n 3-asteisten pisteiden lukumäärän h välillä vallitsee yhtälö $\ell = h + 2$.



1. Onko verkko I isomorfinen verkon H tai verkon J kanssa? Perustele vastauksesi!



2. Määrittellemme verkon G asettamalla

$$P_G = \mathcal{P}[4] \quad (= \{A : A \subset \{1, 2, 3, 4\}\}) \quad \text{ja} \quad V_G = \{\overline{AB} : A, B \in \mathcal{P}[4] \text{ ja } |A \Delta B| = 1\}.$$

Perustele lyhyesti vastauksesi seuraaviin kysymyksiin:

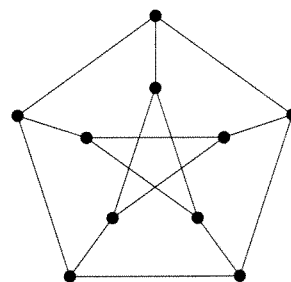
- (a) Mikä on G :n viivojen lukumäärä?
 (b) Onko G yhtenäinen?
 (c) Onko G :ssä Hamiltonin kierrosta?

[Muistutus: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.]

3. Olkoon G verkko. Joukko $A \subset P_G$ on *riippumaton*, jos mitkään kaksi A :n pistettä eivät ole vierekkäin G :ssä. Verkon G *riippumattomuusluku* on

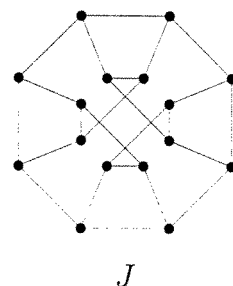
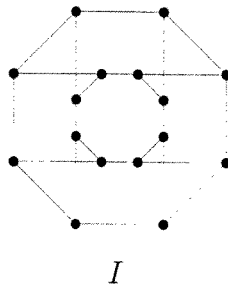
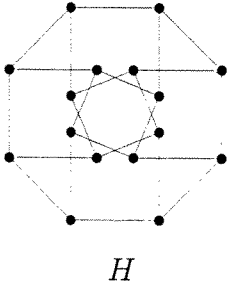
$$\max \{|A| : A \text{ on } G\text{:n riippumaton pistejoukko}\}.$$

Määritä viereisen *Petersenin verkon* P riippumattomuusluku.



4. Osoita, että viiden pisteen täydellisessä verkossa K_5 ei ole kahta keskenään erillistä neliötä (eli 4-rengasta).
5. Olkoon T sellainen puu, jossa on ainakin kaksi pistettä, muttei yhtään 2-asteista pistettä. Näytä, että T :ssä on lehtiä ainakin kaksi kappaletta enemmän kuin muita pisteitä.

1. Onko verkko I isomorfinen verkon H tai verkon J kanssa? Perustele vastauksesi!



2. Määrittelemme verkon G asettamalla

$$P_G = \mathcal{P}[4] \quad (= \{A : A \subset \{1, 2, 3, 4\}\}) \quad \text{ja} \quad V_G = \{\overline{AB} : A, B \in \mathcal{P}[4] \text{ ja } |A \Delta B| = 1\}.$$

Perustele lyhyesti vastauksesi seuraaviin kysymyksiin:

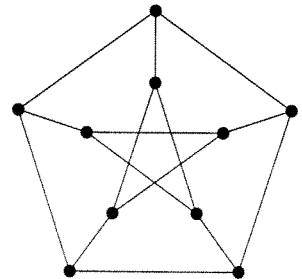
- (a) Mikä on G :n viivojen lukumäärä?
 (b) Onko G yhtenäinen?
 (c) Onko G :ssä Hamiltonin kierrosta?

[Muistutus: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.]

3. Olkoon G verkko. Joukko $A \subset P_G$ on *riippumaton*, jos mitkään kaksi A :n pistettä eivät ole vierekkäin G :ssä. Verkon G *riippumattomuusluku* on

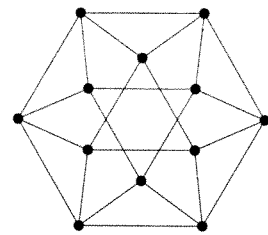
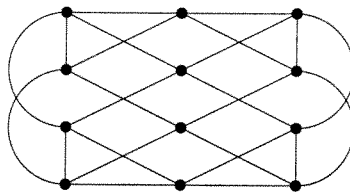
$$\max \{|A| : A \text{ on } G\text{:n riippumaton pistejoukko}\}.$$

Määritä viereisen *Petersenin verkon* P riippumattomuusluku.



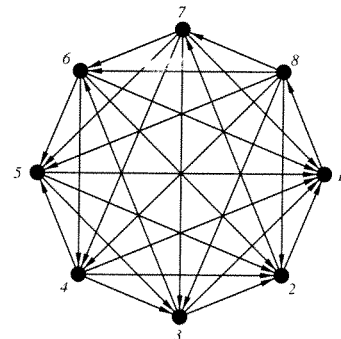
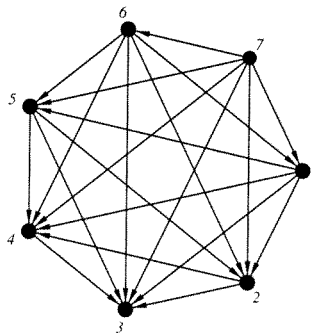
4. Osoita, että viiden pisteen täydellisessä verkossa K_5 ei ole kahta keskenään erillistä neliötä (eli 4-rengasta).
5. Olkoon T sellainen puu, jossa on ainakin kaksi pistettä, muttei yhtään 2-asteista pistettä. Näytä, että T :ssä on lehtiä ainakin kaksi kappaletta enemmän kuin muita pisteitä.

1. Ovatko vieressä kuvatut verkot keskenään isomorfiset? Perustele vastauksesi!

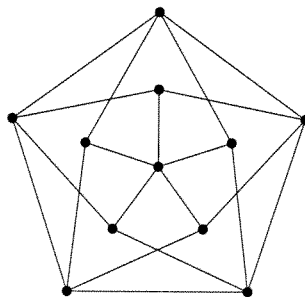


2. Tarkastellaan paperin kääntöpuolelle kuvattua verkkoa.
 (a) Laske verkon viivojen lukumäärä. Pelkkä vastaus ei riitä, näytä myös laskut!
 (b) Onko verkko yhtenäinen? Perustele vastauksesi!

3. Etsi Hamiltonin kulut vieressä kuvatuista täydellisistä suhteikoista. Löytyykö kummastakaan suhteikosta Hamiltonin kierrosta? Jos löytyy, niin etsi sellainen.



4. Seuraavassa esitetään kolme verkkoja koskevaa väitettä. Perustele lyhyesti kussakin tapauksessa, päteekö väite vai ei alla kuvatulle *Grötzschin verkolle*.



- (a) Jos verkon kukin piste värjätään joko siniseksi, punaiseksi, keltaiseksi tai vihreäksi, niin jotkut kaksi vierekkäistä pistettä saavat saman värin.
 (b) Verkossa on kaksi rengasta, joilla ei ole yhteisiä pisteitä.
 (c) Verkossa on Eulerin kulku.
5. *Binääripuu* on sellainen suunnattu puu, jossa jokaisen pisteen lähtöaste on joko 0 tai 2. Osoita, että jokaisen binääripuun pisteiden lukumäärä on pariton.

