VEKTORIANALYYSI
ERILLISKOE
8.8.2007

1. Määritellään funktiot $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$,

$$g(x,y) := (2, 2x - y, 2x + y)$$

sekä $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$,

$$f(x_1, x_2, x_3) := e^{2x_1} + e^{x_2 + x_3} \cos x_3.$$

Laske yhdistetyn kuvauksen $h := f \circ g$ kaikki ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat.

2. Olkoon $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{R}$ funktio

$$f(x,y) := \frac{xy^2 - x^3}{2x^2 + y^2}.$$

Onko olemassa raja–arvoa

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)?$$

3. Olkoon $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ funktio

a) $f(x,y) := x^3 - y^3 + 3xy,$ b) $f(x,y) := x^2 + xy + y^2 + x - y.$

Määrää f:n lokaalit ääriarvokohdat.

4. Tutki seuraavien vektorikenttien $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ eksaktiutta, ja mikäli ne ovat eksakteja, määritä niiden jokin potentiaali:
a) $F(x,y) := (6x^2 + 4y, 4x)$,
b) $F(x,y) := (\cos x + x^2, \sin x)$.

5. Laske käyräintegraali

$$\int_\Gamma (x - z)dx + (y - z)dy - 3z^2 dz,$$

kun $\Gamma(t) = (t^3, t^2, -t)$ ja reaalinen parametri t valitaan siten, että Γ:n alkupiste on origo ja loppupiste $(1, 1, -1)$.

VEKTORIANALYYSI
KURSSIKOE 2
10.12.2007

1. Olkoon $b \geq 0$. Millä b:n arvoilla epäoleellinen integraali

$$\int_{B(0,2)} \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^b} dx_1 dx_2$$

suppenee, kun $B(0,2)$ on tason avoin origokeskinen kiekko, säteenä 2.

2. Laske käyräintegraali

$$\int_\gamma \sin x \, dx - xy^2 dy,$$

kun polun $\gamma \subset \mathbf{R}^2$ päätepisteet ovat $(0,0)$ ja $(2,4)$ ja γ on paraabeli, joka lisäksi kulkee pisteen $(1,1)$ kautta.

3. Laske vektorikentän

$$F(x,y,z) := (y^3 \cos(yz), x^3 e^{-xz}, (xy)^3 \sin(yz))$$

roottorin vuo puolipallon kuoren S (normaalivektori ylöspäin) läpi, kun

$$S := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4, \ z \geq 0\}.$$

4. Onko seuraava vektorikenttä $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ eksakti, ja mikäli on, määrää sen jokin potentiaali:
a) $F(x,y) := (y \sin(x+y), x \cos(x+y))$,
b) $F(x,y) := (y \cos(x+y) - xy \sin(x+y), x \cos(x+y) - xy \sin(x+y))$.

VEKTORIANALYYSI
ERILLISKOE
24.1.2008

1. Määritellään funktiot $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$,

$$g(x, y) := (3, x - y, x + y)$$

sekä $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$,

$$f(x_1, x_2, x_3) := e^{2x_1} + e^{x_2 + x_3} \sin x_3.$$

Laske yhdistetyn kuvauksen $h := f \circ g$ kaikki ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat.

2. Olkoon $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ funktio

a) $f(x, y) := x^3 - y^3 + 3xy,$ b) $f(x, y) := x^2 + xy + y^2 + x - y,$

Määrää f:n lokaalit ääriarvokohdat.

3. Olkoon $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbf{R}$ funktio

$$f(x, y) := \frac{y^3 - yx^2}{x^3 + y^3}.$$

Onko olemassa raja–arvoa

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)?$$

4. Tutki seuraavien vektorikenttien $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ eksaktiutta, ja mikäli ne ovat eksakteja, määritä niiden jokin potentiaali:
a) $F(x, y) := (x^2, \cos x)$,
b) $F(x, y) := (5y + 3x^2, 5x)$.

5. Laske käyräintegraali

$$\int_\Gamma (x - 2y - z)dx + (y + 2z)dy - 3z^3 dz,$$

kun $\Gamma(t) = (t^3, t^2, t)$ ja reaalinen parametri t valitaan siten, että Γ:n alkupiste on origo ja loppupiste $(1, 1, 1)$.

VEKTORIANALYYSI
ERILLISKOE
3.4.2008

1. Suppeneeko pistejono $(y_k)_{k=1}^{\infty}$, kun

$$a)\ \ y_k = \Big(\frac{(-1)^k}{k}, 2 + \frac{1}{k}, 2 + \frac{1}{k^2}, 2\Big) \in \mathbf{R}^4 \quad ?$$

$$b)\ \ y_k = \Big(10, 10\cos(k\pi/4), 10 + \frac{1}{k^2}\Big) \in \mathbf{R}^3 \quad ?$$

Jos suppenee, mikä on jonon raja–arvo?

2. Olkoot $w : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$,

$$w(x_1, x_2, x_3) := \Big(x_2, \frac{x_1}{s + x_2^2}, e^{x_1 x_3}\Big)$$

ja $h : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$,

$$h(x, y, z) = z + y - 2x,$$

sekä $f := h \circ w$. Muodosta $\partial_2 f$ ja $\partial_3 f$ a) suoraan laskemalla yhdistetyn funktion lauseke, b) ketjusäännön avulla.

3. Olkoon $D := \mathbf{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x = 2\}$ ja tarkastellaan pintaa $r(D) \subset \mathbf{R}^3$, missä

$$r(x, y) := (x, y, 1/(x - 2) + xe^{-y^2})$$

Esitä tämän normaalivektori ja tangenttitason yhtälö pisteessä a) $r(1, 1)$, b) $r(3, 2)$.

4. Olkoon S kolmio, jonka pisteet (x, y) toteuttavat $0 \le x \le \pi/2$ ja $0 \le y \le x$. Laske integraali

$$\int_S (x^2 y^2 + \sin x)dxdy.$$

5. Laske ellipsoidin

$$B := \Big\{x \in \mathbf{R}^3 \mid \frac{x_1^2}{9} + \frac{x_2^2}{25} + \frac{x_3^2}{3} \le 1\Big\}$$

tilavuus käyttäen muunnosta $w(x_1, x_2, x_3) = (ax_1, bx_2, cx_3)$, missä positiiviset luvut a, b ja c valitaan siten, että w kuvaa yksikköpallon ellipsoidille B.

VEKTORIANALYYSI
ERILLISKOE
KESÄKUU 2008

1. Tutki seuraavien vektorikenttien $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ eksaktiutta, ja mikäli ne ovat eksakteja, määritä niiden jokin potentiaali:
a) $F(x, y) := (3y, 3x + \cos y)$,
b) $F(x, y) := (x^2, -8y^4)$.

2. Olkoon B tason osajoukko

$$B := \left\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 5, \frac{x}{2} \leq y \leq x\right\}.$$

Suppeneeko epäoleellinen integraali

$$\int_B \frac{1}{x\sqrt{y}} dxdy?$$

3. Olkoon f reaaliarvoinen funktio, joka on määritelty joukossa $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x + y^2 = 2\}$,

$$f(x, y) := \frac{x^2 + y - 4}{x + y^2 - 2}.$$

Onko olemassa raja–arvoa

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} f(x, y)?$$

4. Olkoon $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ funktio

a) $f(x, y) := x^2 + xy + y^2 + x - y$, b) $f(x, y) := (4 - x^2 - y^2)e^{x+y}$.

Määrää f:n lokaalit ääriarvokohdat.

5. Laske vektorikentän $F(x, y, z) := (x^2 - z^2, x^2 + y^2, z)$ vuo pallopinnan

$$S := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$$

läpi.

VEKTORIANALYYSI
ERILLISKOE
14.8.2008

1. Määritellään funktiot $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$,

$$h(x, y) := (3, x - y, x + y)$$

sekä $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$,

$$g(x, y, z) := \cos x + e^{z+y} \sin z.$$

Laske yhdistetyn kuvauksen $f := g \circ h$ kaikki ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat.

2. Olkoon $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{R}$ funktio

$$f(x, y) := \frac{x^4 - x^2y^2}{x^4 + y^4}.$$

Onko olemassa raja–arvoa

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)?$$

3. Olkoon $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ funktio

a) $f(x, y) := 4(x^2 + xy + y^2) + 2(y - x)$, b) $f(x, y) := x^3 - y^3 + 3xy$.

Määrää f:n lokaalit ääriarvokohdat.

4. Tutki seuraavien vektorikenttien $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ eksaktiutta, ja mikäli ne ovat eksakteja, määritä niiden jokin potentiaali:
a) $F(x, y) := (4y + 4x^2, 4x)$,
b) $F(x, y) := (3y^2 - 3x^2, 3x)$.

5. Laske käyräintegraali

$$\int_\Gamma (z + y - x)dx + (y + 3z)dy - 3z^3dz,$$

kun $\Gamma(t) = (t^3, t^2, t)$ ja reaalinen parametri t valitaan siten, että Γ:n alkupiste on origo ja loppupiste $(1, 1, 1)$.

VEKTORIANALYYSI
ERILLISKOE
12.11.2008

1. Määritellään funktio $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(1,0)\} \to \mathbf{R}$,

$$f(x,y) := \frac{x^2 - y^3 - 1}{(x-1)^2 + 4y^2}.$$

Onko mahdollista määritellä arvoa $f(1,0)$ siten, että funktiosta f tulee koko tasossa jatkuva?

2. Esitä funktion $f(x,y) = y^2 \sin x$ toisen asteen Taylorin kehitelmä pisteessä $(\pi, 0)$.

3. Laske sen rajoitetun tasoalueen pinta–ala, jonka reunan muodostavat paraabelit $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = y^2$ ja $x = 3y^2$. Ohje. Piirrä kuva. Käytä muuttujanvaihtokuvausta

$$w^{-1}(x,y) := \left(\frac{y}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right)$$

sekä jakobiaaneja koskevaa kaavaa

$$\tau(w)(s,t) = \frac{1}{\tau(w^{-1})\big(w(s,t)\big)},$$

missä on merkitty (s,t):llä muuttujia w:n määrittelyalueessa.

4. Olkoon $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ funktio

$$f(x,y) := x^3 + 3xy + y^3$$

Määrää f:n lokaalit ääriarvokohdat.

5. Laske vektorikentän

$$F(x,y,z) := (3y^3 e^{-x^2 z^2}, -3x^3 \cos(yz), \cos(xy)\sin(yz))$$

roottorin vuo puolipallon kuoren S (normaalivektori ylöspäin) läpi,

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}.$$

VEKTORIANALYYSI
ERILLISKOE
22.1.2009

1. Määritellään funktiot $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$,

$$g(x, y) := (3, x - y, x + y)$$

sekä $h : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$,

$$h(x_1, x_2, x_3) := e^{2x_1} + e^{x_2 + x_3} \sin x_3.$$

Laske yhdistetyn kuvauksen $f := h \circ g$ kaikki ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat.

2. Olkoon $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbf{R}$ funktio

$$f(x, y) := \frac{2x^3 - 3xy^2}{x^3 + y^3}.$$

Onko olemassa raja arvoa

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)?$$

3. Laske käyräintegraali

$$\int_\Gamma (x - y)dx + (y + 2z)dy - 3z^3 dz,$$

kun $\Gamma(t) = (t^3, t^2, t)$ ja reaalinen parametri t valitaan siten, että Γ:n alkupiste on origo ja loppupiste $(1, 1, 1)$.

4. Tutki seuraavien vektorikenttien $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ eksaktiutta, ja mikäli ne ovat eksakteja, määritä niiden jokin potentiaali:
a) $F(x, y) := (xy, \sin x)$,
b) $F(x, y) := (2y + 2x^2, 2x)$.

5. Olkoon $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ funktio

a) $f(x, y) := x^3 - y^3 + 3xy$. b) $f(x, y) := x^2 + xy + y^2 + x - y$

Määrää f:n lokaalit ääriarvokohdat.

VEKTORIANALYYSI
ERILLISKOE
2.4.2009

1. Olkoon $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ funktio

a) $f(x,y) := (x+y)^2 - xy + x - y$, b) $f(x,y) := 2x^3 - 2y^3 + 6y$.

Määrää f:n lokaalit ääriarvokohdat.

2. Olkoon $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(2,0)\} \to \mathbf{R}$ funktio

$$f(x,y) := \frac{xy^2 + x^2 - 4}{(x-2)^2 + y^4}.$$

Onko olemassa raja–arvoa

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} f(x,y)?$$

3. Laske integraali

$$\int_D f dxdy$$

kun $f : D \to \mathbf{R}$, $f(x,y) := xy^2 + x^3$ ja D on tasoalue

$$D := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid |(x,y)| < 1, x < 0, y < 0\}$$

4. Laske käyräintegraali

$$\int_\gamma 3zdx - 2ydy + x^2dz,$$

kun γ on kolmesta janasta koostuva murtoviiva, jonka alkupiste on $(1,1,0)$, loppupiste on $(0,0,1)$ ja muut kärkipisteet ovat $(1,1,1)$ ja $(1,0,1)$.

5. Laske vektorikentän

$$F(x,y,z) := (3y^3 e^{-x^2 z^2}, -3x^3\cos(yz), \cos(xy)\sin(yz))$$

roottorin vuo puolipallon kuoren S (normaalivektori ylöspäin) läpi,

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}.$$

VEKTORIANALYYSI
ERILLISKOE
KESÄKUU 2009 11.6.09

1. Määritellään funktiot $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$,

$$g(x,y) := (4, x-y, x+y)$$

sekä $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$,

$$f(x_1,x_2,x_3) := e^{x_2+x_3}\sin x_3 + e^{3x_1}.$$

Laske yhdistetyn kuvauksen $h := f \circ g$ kaikki ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat.

2. Olkoon $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ funktio

a) $f(x,y) := x^3 - y^3 + 3xy$, b) $f(x,y) := x^2 + xy + y^2 + x - y$,

Määrää f:n lokaalit ääriarvokohdat.

3. Olkoon $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{R}$ funktio

$$f(x,y) := \frac{y^3 - yx^2}{x^3 + y^3}.$$

Onko olemassa raja–arvoa

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)?$$

4. Tutki seuraavien vektorikenttien $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ eksaktiutta, ja mikäli ne ovat eksakteja, määritä niiden jokin potentiaali:
a) $F(x,y) := (4 - x^2, \cos x)$,
b) $F(x,y) := (7y + 3x^2, 7x)$.

5. Laske integraali

$$\int_D f\,dxdy$$

kun $f : D \to \mathbf{R}$, $f(x,y) := yx^2 + y^3$ ja D on tasoalue

$$D := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid |(x,y)| < 1, x < 0, y < 0\}$$