VEKTORIANALYYSI
KURSSIKOE 2
10.12.2007

1. Olkoon $b \geq 0$. Millä b:n arvoilla epäoleellinen integraali

$$\int_{B(0,2)} \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^b} dx_1 dx_2$$

suppenee, kun $B(0,2)$ on tason avoin origokeskinen kiekko, säteenä 2.

2. Laske käyräintegraali

$$\int_\gamma \sin x \, dx - xy^2 dy,$$

kun polun $\gamma \subset \mathbf{R}^2$ päätepisteet ovat $(0,0)$ ja $(2,4)$ ja γ on paraabeli, joka lisäksi kulkee pisteen $(1,1)$ kautta.

3. Laske vektorikentän

$$F(x,y,z) := (y^3 \cos(yz), x^3 e^{-xz}, (xy)^3 \sin(yz))$$

roottorin vuo puolipallon kuoren S (normaalivektori ylöspäin) läpi, kun

$$S := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4, \; z \geq 0\}.$$

4. Onko seuraava vektorikenttä $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ eksakti, ja mikäli on, määrää sen jokin potentiaali:
a) $F(x,y) := (y \sin(x+y), x \cos(x+y))$,
b) $F(x,y) := (y \cos(x+y) - xy \sin(x+y), x \cos(x+y) - xy \sin(x+y))$.

VEKTORIANALYYSI
KURSSIKOE 2
8.12.2008

1. Olkoon A tason osajoukko $B(0,3) \setminus \bar{B}(0,1)$, missä $B(0,a)$ on origokeskinen, a-säteinen kiekko. Laske integraali

$$\iint_A (1+x)(x^2+y^2)\,dxdy.$$

2. Olkoon $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vektorikenttä $F(x,y) = ((1+x)e^{x+y}, xe^{x+y})$. Laske kentän F käyräintegraali

$$\int_\gamma F \cdot d\bar{s},$$

kun γ on polku, jonka alkupiste on $(-5,0)$ ja loppupiste $(5,0)$ ja joka kulkee pitkin kiekon $B(0,5)$ reunaa ylemmässä puolitasossa.

3. Laske integraali

$$\iiint_G (x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}\,dx_1dx_2dx_3,$$

kun G on $\mathbf{R}^3$:n yksikköpallon ja ylemmän puoliavaruuden $\{x = (x_1,x_2,x_3) \mid x_3 \geq 0\}$ leikkaus.

4. Olkoon

$$G := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid -3 < z < 2\ ,\ x^2+y^2 < 4\}.$$

Määritä vektorikentän $F(x,y,z) := (x, 2y, z^3)$ kokonaisvuo ulospäin reunan ∂G läpi.