Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaali- ja integraalilaskenta II
2. välikoe
20.12.2004

1. Määritä vektorikentän $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
$$F(x,y,z) = (-y^3, x^3, -z^3),$$
divergenssi $\nabla \cdot F$ ja roottori $\nabla \times F$.

2. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ kolmio, jonka kärjet (x,y) ovat pisteissä $(1,0)$, $(2,0)$ ja $(2,1)$. Määritä integraali
$$\iint_A \frac{2y}{x}\, dx\, dy.$$

3. Olkoon
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x - \tfrac{1}{2})^2 + y^2 \leqslant \tfrac{1}{4}\}.$$
Määritä integraali
$$\iint_A x\, dx\, dy$$
käyttämällä muuttujanvaihdossa kuvausta $w : [0, \frac{1}{2}] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$,
$$w(r,\varphi) = (\tfrac{1}{2} + r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

4. Olkoon $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (5y, 3(x+1))$. Määritä
$$\oint_{\partial D} F \cdot d\bar{s},$$
kun $D \subset \mathbb{R}^2$ on origokeskinen 2-säteinen kiekko $B(0,2)$, jonka reunaa ∂D esittää positiivisesti suunnistettu polku.

Vastaa kurssikyselyyn `http://mathstat.helsinki.fi/kurssit/kysely/`

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaali- ja integraalilaskenta II
2. välikoe (ylimääräinen)
12.1.2005

1. Onko vektorikenttä $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x,y) = (y,x)$$

eksakti? Jos on, niin määritä vektorikentän F potentiaali $u : D \to \mathbb{R}$, jolle $u(1,2) = 3$.

2. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ kolmio, jonka kärjet (x,y) ovat pisteissä $(0,1)$, $(1,1)$ ja $(1,2)$. Määritä integraali

$$\iint_A \frac{2y}{x}\,dx\,dy.$$

3. Olkoon

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1,\ y \geqslant 0\}.$$

Määritä integraali

$$\iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

käyttämällä muuttujanvaihtoa

$$(r,\varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

4. Olkoon $D \subset \mathbb{R}^3$ kuutio

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1,\ |y| < 1 \text{ ja } |z| < 1\}.$$

Määritä integraali

$$\iint_{\partial D} F \cdot \bar{n}\,dS,$$

kun $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ on vektorikenttä

$$F(x,y,z) = (x-1, -2y+1, 3z).$$

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Vektorianalyysi
Kurssikoe 2
12.12.2005

1. Määritä funktion $f(x, y) = 5x + 2y$ suurin ja pienin arvo joukossa $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5x^2 + 2y^2 = 14\}$.

2. Määritä
$$\int\int_A xy \, dxdy$$
kun A on kolmio, jonka kärjet ovat pisteissä $(0, 0), (1, 0)$ ja $(1, 1)$.

3. Määritä
$$\int\int_A \frac{y}{x} dx \, dy$$
kun $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, \ 0 < y < x\}$.

4. Miten määritellään integraalit
$$\int_\gamma f \, ds \quad \text{ja} \quad \int_\gamma F \cdot d\bar{s}?$$
Näytä, että
$$\int_\gamma F \cdot d\bar{s} = -\int_{-\gamma} F \cdot d\bar{s},$$
missä $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ja $(-\gamma)(t) = \gamma(b - (t - a))$.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Vektorianalyysi

Korvaava 2. kurssikoe 21.12.2005 klo 13-15 salissa B123

1. Määritä funktion $f(x,y) = x^3 + y^2$ maksimi- ja minimiarvo joukossa $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$.

2. Mikä on suoran $y = x+2$ ja paraabelin $y = x^2$ rajoittaman rajoitetun tasoalueen pinta-ala?

3. Määritä

$$\iint_A \frac{1}{(x+y)^2}\,dx\,dy$$

kun $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ 0 < y < x^2\}$.

4. Formuloi Greenin lause oletuksineen. Määritä Greenin lauseen avulla

$$\oint_{\partial D} F \cdot d\bar{s}$$

kun $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$ ja
$F(x,y) = (x^2+y+1,\ y^3+x)$.

VEKTRORIANALYYSI
KURSSIKOE 2
11.12.2006

1. Laske integraali

$$\int_D f dx_1 dx_2,$$

kun $f : D \to \mathbf{R}$, $f(x) := x_2 x_1^2 + x_2^3$ ja D on tasoalue, joka on yksikkökiekon ja ensimmäisen kvadrantin leikkaus, eli

$$D := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| < 1, x_1 > 0, x_2 > 0\}$$

2. Laske käyräintegraali

$$\int_\gamma y^2 dx - x^2 dy + dz,$$

kun γ on kolmesta janasta koostuva murtoviiva, jonka alkupiste on $(1,1,0)$, loppupiste on $(0,0,1)$ ja muut kärkipisteet ovat $(1,1,1)$ ja $(1,0,1)$.

3. Onko seuraava vektorikenttä $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ eksakti, ja mikäli on, määrää sen jokin potentiaali:
a) $F(x,y) := (\cos(x+y) - x\sin(x+y), -x\sin(x+y))$
b) $F(x,y) := (x\cos(x+y), -y\sin(x+y))$

4. Laske vektorikentän

$$F(x,y,z) := (3y^3 e^{-x^2 z^2}, -3x^3 \cos(yz), \cos(xy)\sin(yz))$$

roottorin vuo puolipallon kuoren S (normaalivektori ylöspäin) läpi,

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}.$$

Matematiikan ja tilastotieteteen laitos
Vektorianalyysi
2. kurssikoe
8.5.2007

1. Määritä
$$\iint_A \frac{x+y}{2+x-y}\,dx\,dy,$$
missä $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x+y \le 2, -1 \le x-y \le 1\}$.

2. Oletetaan, että $\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^2$ on jatkuvasti derivoituva ja injektiivinen ja lisäksi että $\gamma_1(a) > \gamma_2(a)$ ja käyrä jonka polku γ määritää on $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x = y^2 \le 1\}$. Olkoon $F(x,y) = (y,x)$ kaikilla $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Määritä (dr merkitsee samaa kuin $d\bar{s}$)

   (a) $\displaystyle\int_\gamma 12F_1(x,y)\,ds$

   (b) $\displaystyle\int_\gamma F(x,y)\cdot dr$.

3. Oletetaan, että $0 \le a < b$ ja $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ on jatkuvasti derivoituva. Funktion kuvaaja, missä $y = f(x)$, pyörähtää kierroksen z-akselin ympäri xyz-koordinaatistossa. Johda syntyvän pyörähdyspinnan pinta-alalle kaava määrittelemällä pinnan parametriesitys $r : D \to \mathbf{R}^3$ ja määrittämällä $\int_S dS$, missä S on kuvajoukko $r[D]$.

4. Olkoon $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y > 0\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y < x\}$ ja $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y < -x\}$ ja olkoon $F : A \cup B \cup C \to \mathbf{R}^2$ jatkuvasti derivoituva vektorikenttä. Oletetaan, että $u : A \to \mathbf{R}$ on potentiaali (rajoittuman $F|A$, joka täten on konservatiivinen) ja vastaavalla tavalla, että $v : B \to \mathbf{R}$ ja $w : C \to \mathbf{R}$ ovat potentiaaleja. Määritä
$$\int_\gamma F(x,y)\cdot dr$$
kun $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbf{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ja tiedetään, että $u(2,1) = v(0,-1) = w(-2,1) = 1$ ja $u(-2,1) = v(2,1) = w(0,-1) = 2$. Onko koko vektorikentällä potentiaalia $u : A \cup B \cup C \to \mathbf{R}$? Onko kentän rajoittumalla joukkoon $A \cup B$ potentiaalia $u : A \cup B \to \mathbf{R}$? Perustele!