Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaali- ja integraalilaskenta II
1. välikoe
1.11.2004

1. Olkoot $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,
$$f(x,y) = (xy, -x, y),$$
ja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
$$g(x,y,z) = x - ye^z.$$
Laske $\nabla(g \circ f)(-1,0)$.

2. Määritä vektorit v, joiden suuntaan funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y) = x^2 + 2xy - \sqrt{3}y^2,$$
suunnattu derivaatta pisteessä (0, 1) on nolla.

3. Määritä funktion
$$f(x,y) = x^3 - 3xy^2$$
suurin ja pienin arvo joukossa $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

4. Määritä joukko $D \subset \mathbb{R}^3$, johon rajoitettuna kuvaus $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
$$f(x,y,z) = (x, y^2, z^4),$$
on lokaalisti kääntyvä. Onko f:n rajoittuma joukkoon D globaalisti kääntyvä, eli onko $f|_D : D \to \mathbb{R}^3$ injektio?

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaali- ja integraalilaskenta II
1. välikoe (ylimääräinen)
8.11.2004

1. Olkoot $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,
$$f(x,y,z) = (-xy, z^2),$$
ja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$g(x,y) = ye^x.$$
Laske $\nabla(g \circ f)(1,0,-1)$.

2. Määritä funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y) = \sin x \cos y,$$
toisen kertaluvun Taylorin kehitelmä origossa.

3. Määritä funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x - y,$$
lokaalit ääriarvokohdat. Onko f:llä globaaleja ääriarvokohtia $\mathbb{R}^2$:ssa?

4. Määritä pinnan $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,
$$r(x,y) = (x, y, \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2)),$$
tangenttitason normaali pisteessä $r(-1,3)$.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Vektorianalyysi
1. kurssikoe
17.10.2005

1. Onko funktiolla $f : \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2},$$

raja–arvoa $(0,0)$:ssa?

2. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y \sin x + y$. Määritä $\partial_1 f(x,y)$, $\partial_2 f(x,y)$, $\partial_1\partial_2 f(x,y)$.

3. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x^2 y}{|x|+|y|}, & (x,y) &\neq (0,0), \\ &= 0, & (x,y) &= (0,0). \end{aligned}$$

Onko f jatkuva $(0,0)$:ssa?

4. Olkoon $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = (xy, 1), \quad g(x,y) = (y, x+1).$$

Määritä kuvauksen $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lauseke ja derivaatan $(g \circ f)'(x,y)$ esitysmatriisi.

VEKTRORIANALYYSI
KURSSIKOE 1
16.10.2006

1. Suppeneeko pistejono $(x_k)_{k=1}^{\infty}$, kun

$$x_k = \left(1, \frac{1}{k}, \frac{(-1)^k}{k} + 3, -3 + \frac{1}{k^2}\right) \in \mathbf{R}^4 \quad ?$$

Jos suppenee, mikä on jonon raja–arvo?

2. Olkoot $h : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$,

$$h(x, y, z) := (e^{x+y}, e^{y+z}, e^{x-z})$$

ja $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$,

$$g(x, y, z) := 3z + 2y + x,$$

sekä $f := g \circ h$. Muodosta $\partial_1 f$ ja $\partial_3 f$.

3. Olkoon $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ funktio

$$f(x, y) := 1 + x^2 + 2xy + y^2 + y^4.$$

Määrää f:n lokaalit ääriarvokohdat.

4. Olkoon $D := \mathbf{R}^2$ ja tarkastellaan pintaa $r(D) \subset \mathbf{R}^3$, missä

$$r(x, y) := (x^2, 1, y^2)$$

a) Esitä tämän normaalivektori mielivaltaisessa pisteessä $r(x, y)$, missä $x \neq 0$ ja $y \neq 0$ (max. 5 pistettä)
b) Miten kuvailet pintaa sanallisesti (max. 1 piste)?

Matematiikan ja tilastotieteteen laitos
Vektorianalyysi
1. kurssikoe
2.3.2007

1. Määritä funktion $f(x,y,z) = (xy, yz, xz)$ derivaatta suuntaan $\frac{1}{\sqrt{13}}(2,0,-3)$ mielivaltaisessa pisteessä $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.

2. Olkoon $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{x-y} & \text{då } x \geq -y^2 \\ (x-1)^2 & \text{då } x \leq -y^2. \end{cases}$$

Määritä se osittaisderivaatoista

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \text{ ja } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

joka on olemassa. Älä unohda perustella olemassaoloa!

3. Määritä lausekkeen xy suurin ja pienin arvo ellipsillä $x^2 + 4y^2 = 1$.

4. Oletetaan, että $A \subset \mathbf{R}^n$ on kompakti ja $f : A \to \mathbf{R}$ jatkuva. Oletetaan lisäksi, että jokaista $\epsilon > 0$ kohden on olemassa sellainen piste $x \in A$, että $2(1-\epsilon) \leq f(x) < 2+\epsilon$. Osoita, että on olemassa sellainen piste $x \in A$, että $f(x) = 2$. Huomaa: Tehtävän käsitteleminen puhtaana teoriatehtävänä ei liene vaikeaa, mutta tehtävän saa myös käsitellä tavallisena sovellustehtävänä.