Institutionen för matematik och statistik
Vektoranalys
Kursförhör 2
8.5.2007

1. Beräkna
$$\iint_A \frac{x+y}{2+x-y}\,dx\,dy$$
där$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x+y \leq 2, -1 \leq x-y \leq 1\}$.

2. Antag att $\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^2$ är kontinuerligt deriverbar och injektiv samt att $\gamma_1(a) > \gamma_2(a)$ och kurvan som stigen γ beskriver är $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x = y^2 \leq 1\}$. Låt $F(x,y) = (y,x)$ för alla $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Beräkna (dr har samma innebörd som $d\bar{s}$)

   (a) $\displaystyle\int_\gamma 12F_1(x,y)\,ds$

   (b) $\displaystyle\int_\gamma F(x,y)\cdot\,dr.$

3. Antag att $0 \leq a < b$ och $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ är kontinuerligt deriverbar. Funktionens graf där $y = f(x)$ roterar ett varv kring z-axeln i ett xyz-koordinatsystem. Härled en formel för arean av rotationsytan som uppstår, genom att definiera en parameterframställning $r : D \to \mathbf{R}^3$ av ytan och beräkna $\int_S dS$ där S är bildmängden $r[D]$.

4. Låt $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y > 0\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y < x\}$ och $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y < -x\}$ och låt $F : A \cup B \cup C \to \mathbf{R}^2$ vara ett kontinuerligt deriverbart vektorfält. Antag att $u : A \to \mathbf{R}$ är en potential (för restriktionen $F|A$ som således är konservativ) och på motsvarande sätt att $v : B \to \mathbf{R}$ och $w : C \to \mathbf{R}$ är potentialer. Beräkna
$$\int_\gamma F(x,y)\cdot\,dr$$
då $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbf{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ och vi vet att $u(2,1) = v(0,-1) = w(-2,1) = 1$ och $u(-2,1) = v(2,1) = w(0,-1) = 2$. Har hela vektorfältet en potential $u : A \cup B \cup C \to \mathbf{R}$? Har restriktionen av fältet till $A \cup B$ en potential $u : A \cup B \to \mathbf{R}$? Motivera!