TOPOLOGISET VEKTORIAVARUUDET 10 OP / 5 OV 18.5.2006

1. Olkoon E vektoriavaruus (yli $\mathbf{K}$:n).

(a) Miten määritellään seminormi $p : E \to \mathbf{R}$ sekä absorboivan joukon $A \subset E$ Minkowskin funktionaali p_A?

(b) Olkoon $A \subset E$ konveksi ja absorboiva joukko. Osoita, että A:n Minkowskin funktionaalille p_A pätee:

(a) $p_A(x+y) \le p_A(x) + p_A(y)$ kaikille $x, y \in E$;

(b) $p_A(\alpha x) = \alpha p_A(x)$, jos $x \in E$ ja $\alpha \ge 0$;

(c) jos A on balansoitu, niin p_A on seminormi;

(d) jos $B = \{ x \in E \mid p_A(x) < 1 \}$ ja $C = \{ x \in E \mid p_A(x) \le 1 \}$, niin $B \subset A \subset C$ ja $p_A = p_B = p_C$.

2. Olkoon E topologinen vektoriavaruus. Osoita, että joukolle $A \subset E$ seuraavat kolme ehtoa ovat yhtäpitäviä:

(i) jokainen Cauchyn verkko A:ssa suppenee kohti jotakin A:n pistettä;

(ii) aina, kun $\mathcal{F}$ on Cauchyn filtteri E:ssä ja $A \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ suppenee kohti jotakin A:n pistettä;

(iii) aina, kun $\mathcal{F}$ on ultrafiltteri, joka on Cauchyn filtteri E:ssä ja jolle $A \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ suppenee kohti jotakin A:n pistettä.

3. Esitä ja todista lokaalisti konveksin Hausdorffin avaruuden kompakteja konvekseja joukkoja koskeva Kreinin-Milmanin lause.

4. Olkoon $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ epätyhjä avoin joukko. Määrittele testifunktioiden avaruus $\mathcal{D}(\Omega)$ topologisena vektoriavaruutena. Mitä tarkoitetaan distribuutiolla Ω:ssa?

Osoita, että lineaarifunktionaalille $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbf{C}$ seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(i) T on distribuutio;

(ii) jokaista kompaktia $K \subset \Omega$ kohti on olemassa vakio $C_K > 0$ ja luku $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, joille

$$|T\phi| \le C_K \max_{|\alpha| \le m} \sup_{\mathbf{x} \in K} |D^\alpha \phi(\mathbf{x})|$$

aina, kun $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ja $\operatorname{supp}(\phi) \subset K$;

(iii) $\lim_{k\to\infty} T(\phi_k) = 0$ aina, kun (ϕ_k) on sellainen jono $\mathcal{D}(\Omega)$:ssa, että jollekin kiinteälle (k:sta riippumattomalle) kompaktille joukolle $K \subset \Omega$ $\operatorname{supp}(\phi_k) \subset K$ kaikilla $k \in \mathbf{K}$ ja $\lim_{k\to\infty} \sup_{\mathbf{x}\in K} |D^\alpha \phi_k(\mathbf{x})| = 0$ jokaiselle $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j \in \mathbf{N} \cup \{0\}$.

5. Olkoot E ja F Banachin avaruuksia. Osoita, että operaattorille $T \in L(E, F)$ seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(i) T on heikosti kompakti;

(ii) $T''(E'') \subset \hat{F}$, missä $\hat{F}$ on F:n kanoninen kuva F'':ssa;

(iii) $T' : F' \to E'$ on $\sigma(F', F) - \sigma(E', E'')$-jatkuva;

(iv) $T' : F' \to E'$ on heikosti kompakti.

TOPOLOGISET VEKTORIAVARUUDET 10 OP / 5 OV 15.5.2007

1. (a) Mitä tarkoitetaan tynnyrillä topologisessa vektoriavaruudessa?

(b) Olkoon E topologinen vektoriavaruus. Olkoon kullekin seminormille $p : E \to \mathbf{R}$ U_p sen suljettu yksikkösemipallo. Osoita, että kuvaus $p \mapsto U_p$ on bijektio kaikkien jatkuvien seminormien $p : E \to \mathbf{R}$ joukolta kaikkien sellaisten tynnyreiden $A \subset E$ joukolle, jotka ovat origon ympäristöjä.

2. Olkoon (E, τ) lokaalisti konveksi topologinen vektoriavaruus. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(i) E on pseudometristyvä;

(ii) on olemassa numeroituva E:n origon ympäristökanta;

(iii) E:n topologian määrää jokin numeroituva seminormijoukko.

3. Esitä ja todista lineaarifunktionaalin laajentamista koskeva Hahnin-Banachin lause reaalikertoimisen vektoriavaruuden tapauksessa.

4. Oletetaan, että vektoriavaruudet E ja F muodostavat parin $\langle E, F\rangle$, joka separoi F:n pisteet.

(a) Miten määritellään E:n Mackeyn topologia parin $\langle E, F\rangle$ suhteen?

(b) Osoita, että E:n Mackeyn topologia parin $\langle E, F\rangle$ suhteen sopeutuu pariin $\langle E, F\rangle$.

(c) Esitä ja todista Mackeyn-Arensin lause.

5. Olkoot E ja F Banachin avaruuksia. Osoita, että operaattorille $T \in L(E, F)$ seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(i) T on heikosti kompakti;

(ii) $T''(E'') \subset \hat{F}$, missä $\hat{F}$ on F:n kanoninen kuva F'':ssa;

(iii) $T' : F' \to E'$ on $\sigma(F', F) - \sigma(E', E'')$-jatkuva;

(iv) $T' : F' \to E'$ on heikosti kompakti.