Topologiset vektoriavaruudet II, 11.6.2009 (kesto n. 4h)

1. Olkoon (X, τ) topologinen avaruus. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä joukolle $A \subset X$:

(i) A on kompakti;

(ii) kaikkien τ:n A:han indusoiman relatiivitopologian suhteen suljettujen A:n osajoukkojen kokoelmalla on äärellisten leikkausten ominaisuus;

(iii) aina, kun $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ on filtteri ja $A \in \mathcal{F}$, on olemassa filtteri $\mathcal{F}' \subset \mathcal{P}(X)$ ja piste $a \in A$, joilla $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ ja filtteri $\mathcal{F}'$ suppenee kohti pistettä a;

(iv) jokainen ultrafiltteri, johon A kuuluu, suppenee kohti jotakin joukon A pistettä.

2. Miten määritellään tynnyri ja tynnyriavaruus? Todista: Jos lokaalisti konveksi avaruus E on toista kategoriaa itsessään, niin E on tynnyriavaruus. Anna esimerkki lokaalisti konveksista avaruudesta, joka ei ole tynnyriavaruus.

3. Esitä ja todista rajoitettuja joukkoja koskeva Mackeyn lause. Esitä ja todista myös sitä valmisteleva apulause, jossa tarkastellaan sopivassa joukossa pisteittäin rajoitettua kokoelmaa jatkuvia lineaarikuvauksia.

4. (a) Esitä ja todista suljetun kuvaajan lause (kurssilla käytetyssä yleisyydessä).

(b) Tarkastellaan Hilbertin avaruuden ℓ^2 aliavaruutta

$$\ell_0^2 = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \mid f(n) \neq 0 \text{ vain äärellisen monella } n \in \mathbb{N}\}$$

(indusoitu normi $\|f\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^2}$). Olkoon $g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ funktio ja $T_g : \ell_0^2 \to \ell_0^2$ kaavalla $T_g f = gf$ määritelty lineaarikuvaus. Anna välttämättömät ja riittävät ehdot sille, että

(i) T_g on suljettu;

(ii) T_g on normin suhteen jatkuva;

(iii) T_g voidaan laajentaa suljetuksi lineaarikuvaukseksi $S : \ell^2 \to \ell^2$.

5. Esitä ja todista kompakteja konvekseja joukkoja koskeva Kreinin-Milmanin lause.