Topologiset vektoriavaruudet I, 16.12.2008 (kesto n. 4h)

1. Olkoon E vektoriavaruus yli skalaarikunnan $\mathbb{K}$. Olkoon M E:n vektorialiavaruus. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(i) M on E:n maksimaalinen aito vektorialiavaruus (ts. $M \neq E$ ja M ja E ovat ainoat M:n sisältävät aliavaruudet);

(ii) $M \neq E$ ja $M + \mathrm{sp}(x) = E$ kaikilla $x \in E \setminus M$;

(iii) on olemassa sellainen $z \in E \setminus M$, että $M + \mathrm{sp}(z) = E$;

(iv) $\dim(E/M) = 1$;

(v) on olemassa sellainen lineaarifunktionaali $f : E \to \mathbb{K}$, että $f \neq 0$ ja $M = \ker(f)$.

(Tässä merkintä $\mathrm{sp}(x)$ tarkoittaa luonnollisesti x:n virittämää aliavaruutta.)

Osoita, että kohdassa (v) oleva f on skalaaritekijää vaille yksikäsitteisesti määrätty.

2. (a) Mitä tarkoitetaan tynnyrillä topologisessa vektoriavaruudessa?

(b) Olkoon E topologinen vektoriavaruss. Olkoon kullekin seminormille $p : E \to \mathbb{R}$ U_p sen suljettu yksikkösemipallo. Osoita, että kuvaus $p \mapsto U_p$ on bijektio kaikkien jatkuvien seminormien $p : E \to \mathbb{R}$ joukolta kaikkien sellaisten tynnyreiden $A \subset E$ joukolle, jotka ovat origon ympäristöjä.

3. Olkoon (E, τ) lokaalisti konveksi avaruus. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(i) E on pseudometristyvä;

(ii) on olemassa numeroituva E:n origon ympäristökanta;

(iii) E:n topologian määrää jokin numeroituva seminormijoukko.

4. Olkoon E vektoriavaruus ja (E_i, τ_i) lokaalisti konveksi avaruus jokaisella $i \in \mathcal{I}$. Olkoon $T_i : E_i \to E$ lineaarikuvaus jokaisella $i \in \mathcal{I}$.

(a) Miten määritellään E:n induktiivinen lokaalisti konveksi topologia τ lineaarikuvausperheen $(T_i)_{i \in \mathcal{I}}$ suhteen?

(b) Olkoon F lokaalisti konveksi avaruus ja $S : E \to F$ lineaarikuvaus. Osoita, että S on τ:n suhteen jatkuva, jos ja vain jos jokaisella $i \in \mathcal{I}$ yhdistetty kuvaus $S \circ T_i : E_i \to F$ on jatkuva.

(c) Osoita, että τ on E:n hienoin lokaalisti konveksi topologia, jonka suhteen jokaisella $i \in \mathcal{I}$ lineaarikuvaus $T_i : E_i \to E$ on jatkuva.

(d) Osoita, että E:n origon erään τ-ympäristökannan muodostavat ne absorboivat, balansoidut ja konveksit joukot W, joille alkukuva $T_i^{-1}(W)$ on origon ympäristö E_i:ssä kaikilla $i \in \mathcal{I}$.

5. Esitä ja todista Bohnenblustin-Sobczykin-Suhomlinovin lause (eli kompleksinen Hahnin-Banachin lause). Todista myös sitä valmisteleva apulause, jossa on kyse lineaarifunktionaalin esittämisestä reaaliosansa avulla.

Topologiset vektoriavaruudet I, 17.12.2008 (kesto n. 4h)

1. Oletetaan, että E on topologinen vektoriavaruus yli skalaarikunnan $\mathbb{K}$. Olkoon $f : E \to \mathbb{K}$ lineaarifunktionaali ja M sen ydin.

(a) Merkitään $V = \{x \in E \mid |f(x)| < 1\}$. Olkoon $a \in E$ sellainen, että $f(a) = 1$. Osoita, että balansoidulle joukolle $U \subset E$ on $(a + U) \cap M = \emptyset$, jos ja vain jos $U \subset V$.

(b) Osoita, että f on jatkuva, jos ja vain jos M on suljettu.

2. (a) Olkoon E vektoriavaruus yli skalaarikunnan $\mathbb{K}$ ja olkoot

$$f, f_1, \ldots, f_n \in E^a$$

($=$ E:n algebrallinen duaali). Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(i) joillekin $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ on $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$;

(ii) jollekin vakiolle $C > 0$ on $|f(x)| \leq C \max_{1 \leq i \leq n} |f_i(x)|$ kaikilla $x \in E$;

(iii) $\cap_{i=1}^n \ker(f_i) \subset \ker(f)$.

(b) Oletetaan, että vektoriavaruudet E ja F muodostavat parin bilineaarimuodon $\langle \cdot, \cdot \rangle$ suhteen. Karakterisoi (a):n avulla topologian $\sigma(E, F)$ suhteen jatkuvat lineaarifunktionaalit E:ssä.

3. Olkoon (E, τ) lokaalisti konveksi avaruus. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(i) E on pseudometristyvä;

(ii) on olemassa numeroituva E:n origon ympäristökanta;

(iii) E:n topologian määrää jokin numeroituva seminormijoukko.

4. Esitä ja todista Hahnin-Banachin lause reaalisessa tapauksessa. Vaikka sana "konveksi" ei esiinny lauseen muotoilussa, lause liittyy läheisesti konveksiuteen. Mitä näkökohtia voit esittää tämän väitteen tueksi?

5. Olkoon X joukko. Miten määritellään filtteri ja ultrafiltteri X:ssä? Olkoon $\mathcal{F}$ filtteri X:ssä. Osoita, että $\mathcal{F}$ on ultrafiltteri, jos ja vain jos jokaisella $A \subset X$ joko $A \in \mathcal{F}$ tai $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

Topologiset vektoriavaruudet I, 3.3.2009 (kesto n. 4h)

1. Olkoon E vektoriavaruus. Jos $A \subset E$ on absorboiva joukko, p_A tarkoittaa sen Minkowskin funktionaalia. Olkoon $A \subset E$ konveksi ja absorboiva joukko. Osoita, että p_A:lle pätee:

(i) $p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y)$ kaikille $x, y \in E$;

(ii) $p_A(\alpha x) = \alpha p_A(x)$, jos $x \in E$ ja $\alpha \geq 0$;

(iii) Jos $B = \{x \in E \,|\, p_A(x) < 1\}$ ja $C = \{x \in E \,|\, p_A(x) \leq 1\}$, niin $B \subset A \subset C$ ja $p_A = p_B = p_C$.

2. Olkoot E ja F lokaalisti konvekseja avaruuksia. Oletetaan, että E:n topologian määrää seminormijoukko $\mathcal{P}$ ja F:n topologian seminormijoukko $\mathcal{Q}$. Osoita, että ineaarikuvaukselle $T : E \to F$ seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(i) T on jatkuva;

(ii) jokaista $q \in \mathcal{Q}$ vastaa äärellinen joukko $\{p_1, \ldots, p_n\} \subset \mathcal{P}$ ja vakio $C > 0$, joille $q(Tx) \leq C \max_{1 \leq k \leq n} p_k(x)$ kaikilla $x \in E$.

3. (a) Olkoon E vektoriavaruus yli skalaarikunnan $\mathbb{K}$ ja olkoot $f, f_1, \ldots, f_n \in E^a$ ($= E$:n algebrallinen duaali). Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(i) joillekin $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ on $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$;

(ii) jollekin vakiolle $C > 0$ on $|f(x)| \leq C \max_{1 \leq i \leq n} |f_i(x)|$ kaikilla $x \in E$;

(iii) $\cap_{i=1}^n \ker(f_i) \subset \ker(f)$.

(b) Oletetaan, että vektoriavaruudet E ja F muodostavat parin bilineaarimuodon $\langle \cdot, \cdot \rangle$ suhteen. Karakterisoi (a):n avulla topologian $\sigma(E, F)$ suhteen jatkuvat lineaarifunktionaalit E:ssä.

4. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ epätyhjä avoin joukko. Märittele testifunktioiden avaruus $\mathcal{D}(\Omega)$ topologisena vektoriavaruutena. Mitä tarkoitetaan distribuutiolla Ω:ssa?

Osoita, että lineaarifunktionaalille $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(i) T on distribuutio;

(ii) jokaista kompaktia $K \subset \Omega$ kohti on olemassa vakio $C_K > 0$ ja luku $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, joille $|T\phi| \leq C_K \max_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |D^\alpha \phi(x)|$ aina, kun $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ja $\mathrm{supp}(\phi) \subset K$;

(iii) $\lim_{k \to \infty} T(\phi_k) = 0$ aina, kun (ϕ_k) on sellainen jono $\mathcal{D}(\Omega)$:ssa, että jollekin kiinteälle (k:sta riippumattomalle) kompaktille joukolle $K \subset \Omega$ $\mathrm{supp}(\phi_k) \subset K$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja $\lim_{k \to \infty} \sup_{x \in K} |D^\alpha \phi_k(x)| = 0$ jokaiselle $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

5. Esitä ja todista Hahnin-Banachin lause reaalisessa tapauksessa.