Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Topologiset ryhmät

25.10.2005

1. Merkitsemme $S_{\mathbb{N}} = \{f : f \text{ on bijektio } \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ ja merkitsemme τ:lla joukon $S_{\mathbb{N}}$ relatiivitopologiaa tuloavaruudessa $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (tässä $\mathbb{N}$ on diskreetti avaruus). Osoita, että τ on ryhmän $(S_{\mathbb{N}}, \circ)$ ryhmätopologia.

   [*Ohje*: Muodosta $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$:lle τ-ympäristökanta "tyypillisillä" relatiivisen tulotopologian joukoilla ja näytä, että se toteuttaa ehdot, jotka luonnehtivat neutraalialkion ympäristökantoja ryhmätopologioissa.]

2. (a) Olkoon A sellainen toporyhmän G yhtenäinen osajoukko, että G:n neutraalialkio kuuluu joukkoon A. Näytä, että joukon A virittämä G:n aliryhmä on yhtenäinen.

   (b) Olkoon G yhtenäinen topologinen ryhmä. Osoita, että G:n "kommutaattorialiryhmä" eli joukon $\{g^{-1}h^{-1}gh : g \in G \text{ ja } h \in G\}$ virittämä G:n aliryhmä on yhtenäinen.

3. ("Kirjan tehtävä") Esitä lokaalisti kompaktien ryhmien välisten homomorfismien avoimuutta koskeva lause ja hahmottele lauseelle todistus.

4. Näytä, että kompaktin ryhmän G invariantille integraalille on voimassa

$$\int_G f(x^{-1})dx = \int_G f(x)dx \quad \text{jokaisella } f \in \mathcal{K}(G)\,.$$

5. Monisteessa todistetaan, että jokaisella kompaktilla kommutatiivisella T_1-ryhmällä G on voimassa $w(G) = w(G^*)$. Osoita, että sama tulos pätee jokaiselle kompaktisti viritetylle lokaalisti kompaktille kommutatiiviselle T_1-ryhmälle.

   [*Muistutus*: $w(X)$ merkitsee topologisen avaruuden X *painoa* eli pienintä topologian kannan mahtavuutta. *Ohje*: Käytä struktuurilausetta.]

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Topologiset ryhmät

7.3.2006

1. Merkitsemme $G = \{(A,n) \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z} :$ joukko A on alhaalta rajoitettu$\}$ ja määrittelemme joukossa G laskutoimituksen $\diamond$ asettamalla $(A,n)\diamond(B,k) = \big(A\Delta(n+B), n+k\big)$. Näytä, että pari $(G,\diamond)$ on ryhmä (laskutoimituksen assosiatiivisuutta *ei* tarvitse osoittaa) ja sillä on sellainen ryhmätopologia, jossa joukot $U_n = \{(A,0) : k \geq n$ jokaisella $k \in A\}$, $n \in \mathbb{Z}$, muodostavat neutraalialkiolle ympäristökannan.

   [Muistutus: $\mathcal{P}(\mathbb{Z}) = \{A : A \subset \mathbb{Z}\}$ ja $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.]

2. Olkoon H lokaalisti kompaktin toporyhmän G suljettu normaali aliryhmä ja olkoon C tekijätoporyhmän G/H kompakti osajoukko. Osoita, että on olemassa sellainen G:n kompakti osajoukko K, että $\varphi_H(K) = C$.

   [Ohje: Valitse G:n neutraalialkiolle sellainen avoin ympäristö U, että $\overline{U}$ on kompakti, ja tarkastele joukkoja $\varphi_H(gU)$, $g \in G$.]

3. ("Kirjan tehtävä") Olkoon G monoteettinen kompakti T_1-toporyhmä. Osoita, että ryhmä G^* on isomorfinen ryhmän $\mathbb{T}$ aliryhmän kanssa.

4. Olkoon ϕ täysin epäyhtenäisen kompaktin toporyhmän G unitaarinen esitys. Osoita, että joukko $\phi(G)$ on äärellinen.

   [*Lisätieto.* Voit käyttää hyväksi seuraavaa tulosta: Kun T on äärellisulotteisen sisätuloavaruuden V unitaarinen operaattori ja $T \neq I$, niin on voimassa $\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|T^n - I\| \geq 1$.]

5. Olkoon g lokaalisti kompaktin kommutatiivisen T_1-toporyhmän G epäkompakti piste. Osoita, että on olemassa sellainen jatkuva homomorfismi $\psi : G \to \mathbb{R}$, että $\psi(g) \neq 0$.

   [Vihje: struktuurilause.]