Topologia III
Kurssikoe 17.12.2008

Vastaa viiteen seuraavista seitsemästä tehtävästä!

1. a) Esittele lyhyesti homotopiaryhmän määritelmä; mitä ovat ryhmän alkiot, miten ne konstruoidaan? Miten laskutoimitus määritellään? Esittele myös indusoidun homomorfismin määritelmä ja tärkeimmät ominaisuudet. (Tässä ei tarvitse esittää todistuksia, tarvittaessa voit käyttää esim. sanontaa "Voidaan osoittaa, että ...")

b) Onko seuraava väite tosi (perusteluksi todistus tai vastaesimerkki)? Jos avaruudet X ja Y ovat homotopiaekvivalentit ja X on yhtenäinen, niin Y on yhtenäinen.

c) Onko seuraava väite tosi (perusteluksi todistus tai vastaesimerkki)? Jos separoituvat metriset avaruudet X ja Y ovat homotopiaekvivalentit, niin $\dim(X) = \dim(Y)$.

2. a) Laske $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \ell)$, missä $\ell = \{(0,0,t) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$.

b) Laske $\pi_1(X)$, missä $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid$ ainakin yksi koordinaateista $x_i \in \mathbb{Z}\}$.

3. a) Mitä tiedetään homotopiaryhmistä $\pi_k(S^n)$; $1 \leq k \leq n$; $n = 1, 2, \ldots$ (Ei tarvitse esittää todistuksia)

b) Osoita a)-kohdan tietojen avulla, että $\mathbb{R}^n$ ja $\mathbb{R}^m$ eivät ole homeomorfiset, kun $n \neq m$.

4. Esitä tarvittavien käsitteiden määritelmät ja todista seuraava tulos: olk. X avaruus, $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ X:n avoin peite ja $\{h_\alpha \mid \alpha \in A\}$ peitteeseen $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ sopiva ykkösen ositus. Olkoon $\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in A\}$ perhe jatkuvia funktioita $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}$. Määritellään

$$f_\alpha : X \to \mathbb{R}, \quad f_\alpha(x) = \begin{cases} \varphi_\alpha(x), & x \in U_\alpha \\ 0, & x \notin U_\alpha \end{cases}, \quad \alpha \in A.$$

Tällöin funktio $\varphi : X \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \sum_{\alpha \in A} f_\alpha(x) h_\alpha(x),$$

on jatkuva.

→ käännä

5. Esittele pääpiirteittäin Stone-Čech-kompaktisoinnin konstruktio.
Osoita, että avaruuden X Stone-Čech-kompaktisointi $\beta(X)$ on yhtenäinen jos ja vain jos X on yhtenäinen.

6. Esittele (pienen induktiivisen) dimension määritelmä.
Osoita, että $\dim(\mathbb{R}) = 1$.
Osoita, että Hilbertin kuutio $I^{\mathbb{N}}$ on ääretönulotteinen.

7. Osoita karteesisen tulon dimensioon liittyvä kaava

$$\dim(A \times B) \leq \dim(A) + \dim(B)$$

(missä A ja B ovat separoituvia metrisiä avaruuksia, joista ainakin toinen on epätyhjä).

Topologia III
Kurssikoe 2.4.2009

Vastaa viiteen seuraavista seitsemästä tehtävästä!

1. a) Anna esimerkki avaruudesta X ja aliavaruudesta $A \subset X$ siten, että inkluusion $i : A \to X$ indusoima homomorfismi $i_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ on surjektio, mutta ei injektio.

   b) Anna esimerkki avaruuksista X ja Y sekä jatkuvasta funktiosta $f : X \to Y$ siten, että $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ on isomorfismi, mutta f ei ole homeomorfismi.

   c) Anna esimerkki avaruudesta X ja aliavaruudesta $A \subset X$ siten, että inkluusion indusoima homomorfismi $\pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ on isomorfismi, mutta inkluusion indusoima homomorfismi $\pi_2(A, x_0) \to \pi_2(X, x_0)$ ei ole isomorfismi.

2. Osoita yksityiskohtaisesti, että tason osajoukko $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ ei ole homeomorfinen koko tason $\mathbb{R}^2$ kanssa.

3. Osoita, että $\pi_n(S^1) = 0$, kun $n > 1$.

4. Oletetaan, että avaruudella X on ominaisuus: jokaiselle $\overbrace{\text{avoimelle peitteelle}}^{X\text{:n}}$ löytyy siihen sopiva ykkösen ositus.
   Osoita, että X on parakompakti.

5. Esittele pääpiirteittäin Stone-Čech-kompaktisoinnin konstruktio.
   Osoita, että suljettu väli $[0,1]$ ei ole avoimen välin $]0,1[$ Stone-Čech-kompaktisointi.

6. Esittele (pienen induktiivisen) dimension määritelmä.
   Osoita, että $\dim(\mathbb{R}^n) \leq n \quad \forall\, n \geq 1$.

7. Olk. $X \subset \mathbb{R}$. Osoita: X on 0-ulotteinen
   $\iff$ X ei sisällä yhtään väliä $]a,b[$, $a<b$.