Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia II
Loppukoe
9.8.2007

1. Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus, Y joukko ja $f : X \to Y$ kuvaus. Esittele kuvaukseen f liittyvä ekvivalenssirelaatio R_f, tekijäavaruus X/R_f ja f:n kanoninen hajoitelma.

2. Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus. Määritä kuvausperheen $\mathcal{A}$ X:ään indusoima topologia, kun
a) $\mathcal{A} = \{f : X \to X \mid f \text{ vakiokuvaus}\}$
b) $\mathcal{A} = \{f : X \to X \mid f \text{ jatkuva}\}$.

3. Osoita, että säännöllisten topologisten avaruuksien X_i $(i \in I)$ tuloavaruus $X = \prod_{i \in I} X_i$ on säännöllinen.

4. Osoita, että topologisen avaruuden $(X, \mathcal{T})$ yhtenäiset komponentit ovat suljettuja joukkoja. Näytä esimerkillä, ettei komponentin tarvitse olla avoin.

5. Olkoon X epätyhjä kompakti Hausdorffin avaruus ja $f : X \to X$ jatkuva kuvaus. Osoita, että on olemassa sellainen epätyhjä X:n suljettu osajoukko A, että $f(A) = A$.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia II
Loppukoe
18.12.2007

1. Osoita, että joukot $[a, b[\times [c, d[$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a < b,\ c < d)$ muodostavat $\mathbb{R}^2$:n erään topologian $\mathcal{T}$ kannan. Ovatko $\mathbb{R}^2$:n kaksi suoraa aina homeomorfiset keskenään, kun niiden topologia on $\mathcal{T}$:n indusoima?

2. Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus ja $A \subset X$. Osoita, että seuraavat ehdot ovat keskenään yhtäpitävät
   (1) A on tiheä X:ssä
   (2) $A \cap U \neq \emptyset \quad \forall U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$
   (3) $\operatorname{int}(X \setminus A) = \emptyset$.

3. (a) Anna esimerkki $\mathbb{R}^2$:n polkuyhtenäisestä aliavaruudesta, jonka sulkeuma ei ole polkuyhtenäinen.
   (b) Osoita, että yhtenäisen avaruuden kuva jatkuvassa kuvauksessa on yhtenäinen.

4. Olkoot X ja Y Hausdorffin avaruuksia, $f : X \to Y$ jatkuva kuvaus ja $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ aleneva jono X:n kompakteja osajoukkoja. Osoita, että $f(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(K_n)$.

5. Avaruus X on täysin epäyhtenäinen, jos sen komponentit ovat yksipisteisiä. Osoita, että täysin epäyhtenäisten avaruuksien X_i $(i \in I)$ tuloavaruus $\prod_{i \in I} X_i$ on täysin epäyhtenäinen.

TopologiaII.

LOPPUKOE (20.05.2008)

Valitse vain toinen tehtävistä 5 ja 6. Symboli I tarkoittaa reaaliakselin suljettua väliä $[0,1]$.

1. Olkoot X ja Y Hausdorffin avaruuksia, $f : X \to Y$ ja $g : X \to Y$ jatkuvia kuvauksia. Olkoon A avaruuden X tiheä osajoukko. Oletetaan, että rajoittumakuvauksille pätee $f_{|A} = g_{|A}$. Osoita, lähtien perusmääritelmistä, että $f = g$.

2.Olkoot $A \subset X$ ja $B \subset Y$, missä X ja Y ovat topologisia avaruuksia. Osoita, että

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}.$$

3. (i) Määrittele topologisen avaruuden komponentit.

(ii) Osoita, ettei väli $[0,2]$ ole yhtenäinen avaruuden $(\mathbf{R}, \tau_{\mathrm{pa}})$ osajoukko. Tässä τ_{pa} on puoliavointen välien $[a,b[$ virittämä topologia $\mathbf{R}$:ssa.

4. (i) Määrittele lyhyesti topologisen avaruuden ominaisuudet : säännöllisyys, N_2-ominaisuus, kompaktisuus.

(ii) Mitkä (i)-kohdan ominaisuuksista ovat avaruudella $\mathbf{R} \times I^{\mathbf{N}}$. Perustele vastauksesi lyhyesti esim. vetoamalla sopiviin kurssin lauseisiin.

5. Olkoon X^* Hausdorffin avaruuden X yhden pisteen kompaktisointi. Perustele miksi

(i) X^* on kompakti

(ii) X^* on Hausdorff jos ja vain jos X on lokaalisti kompakti.

6. Avaruus X on σ-kompakti, mikäli se on voidaan esittää numeroituvana unionina kompakteista osajoukoista. Merkitään $Q = I^{\mathbf{N}}$ (Hilbertin kuutio) ja $s =]0,1[^{\mathbf{N}}$. Osoita, että osajoukko $Q \setminus s$ on σ-kompakti.

TopologiaII.

LOPPUKOE (12.06.2008)

Valitse vain toinen tehtävistä 5 ja 6. Symboli I tarkoittaa reaaliakselin suljettua väliä $[0, 1]$.

1. Mikä on upotus? Mikä on samastuskuvaus? Oletetaan, että $f : X \to Y$ ja $g : Y \to X$ ovat jatkuvia ja $g \circ f = id$ (avaruuden X identtinen kuvaus). Osoita, että f on upotus ja g on samastuskuvaus.

2.Olkoot $A \subset X$ ja $B \subset Y$, missä X ja Y ovat topologisia avaruuksia. Osoita, että

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}.$$

3. Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia ja $f : X \to Y$ jatkuva ja avoin surjektio. Osoita: jos avaruus X on N_1, niin myös avaruus Y on N_1.

4. (i) Milloin topologinen avaruus on normaali? Periytyykö normaalius suljettuihin osajoukkoihin (toisin sanoen, jos X on normaali, onko jokainen epätyhjä suljettu osajoukko $A \subset X$ normaali) ? Perustele vastauksesi lyhyesti hahmottelemalla todistus tai antamalla vastesimerkki.

(ii) Milloin topologinen avaruus on lokaalisti yhtenäinen? Periytyykö lokaalinen yhtenäisyys suljettuihin osajoukkoihin ? Perustele vastauksesi lyhyesti hahmottelemalla todistus tai antamalla vastesimerkki.

5. Osoita, että metrinen avaruus X on N_2 (eli X:n topologialla on numeroituva kanta) mikäli X on separoituva.

6. Olkoon X kompakti Hausdorffin avaruus ja olkoon $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ vähenevä jono avaruuden X suljettuja ja yhtenäisiä osajoukkoja. Osoita, että leikkaus $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ on yhtenäinen. [Ohje: tee vastaoletus: $E = E_1 \cup E_2$, missä epätyhjillä joukoilla E_1 ja E_2 on erilliset avoimet ympäristöt $U \cup V$. Tarkastele joukkoa $A_k \setminus (U \cup V)$ ja päättele, että on olemassa indeksi k_0 jolle viimeksikirjoitettu joukko on tyhjä.]

TopologiaII.
LOPPUKOE (21.10.2008)

Valitse vain toinen tehtävistä 5 ja 6.

1. Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia. Perustele tarkasti (lähtien jatkuvan funktion määritelmästä) että jatkuvalle kuvaukselle $f : X \to Y$ ja jokaiselle $A \subset X$ pätee

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

2.Olkoot $A \subset X$ ja $B \subset Y$, missä X ja Y ovat topologisia avaruuksia. Osoita, tarkasti määritelmiin nojautuen, että tulojoukon $A \times B$ reunalle on voimassa kaava

$$\partial(A \times B) = (\partial A \times B) \cup (A \times \partial B).$$

3. Olkoot τ_1 ja τ_2 topologioita joukossa X. Ovatko seuraavat väitteet tosia? Perusteluksi todistus tai vastaesimerkki.

(i) Jos avaruus (X, τ_1) on yhtenäinen ja $\tau_1 \subset \tau_2$, niin avaruus (X, τ_2) on yhtenäinen.

(i) Jos avaruus (X, τ_2) on yhtenäinen ja $\tau_1 \subset \tau_2$, niin avaruus (X, τ_2) on yhtenäinen.

4. (i) Määrittele lyhyesti topologisen avaruuden ominaisuudet : normaalius, N_1-ominaisuus, lokaali kompaktisuus.

(ii) Mitkä (i)-kohdan ominaisuuksista ovat avaruudella $\mathbf{R} \times I^{\mathbf{N}}$. Perustele vastauksesi lyhyesti (tarvittaessa vetoamalla kurssin lauseisiin).

5. Olkoon X topologinen avaruus. Merkitään $Y = X \times I$, missä reaaliakselin väli $I = [0, 1]$ on varustettu tavallisella topologialla. Merkitään $A = X \times \{1\}$. Luhistetaan A pisteeksi, eli muodostetaan tekijäavaruus Y/A. Osoita, että Y/A on polkuyhtenäinen.

6. Osoita että kompaktilla metrisellä avaruudella on numeroituva kanta, eli että se on N_2.

TopologiaII.
LOPPUKOE (14.08.2008)

Valitse vain toinen tehtävistä 5 ja 6.

1. Määrittele topologisen avaruuden kanta. Olkoot $\mathcal{B}_1$ ja $\mathcal{B}_2$ topologisen avaruuden (X, τ) kantoja. Osoita että kokoelma

$$\mathcal{B} = \{B_1 \cap B_2 \mid B_1 \in \mathcal{B}_1 \text{ ja } B_2 \in \mathcal{B}_2\}$$

on myös X:n kanta.

2. Määrittele topologisille avaruuksille Lindelöfin ominaisuus ja ominaisuus N_2. Näytä, että metrisellä avaruudella X on Lindelöf ominaisuus mikäli X on N_2.

3. Olkoon joukossa X kuvaus perheen $(f_j)_{j \in J}$ indusoima topologia, missä $f_j : X \to Y_j$ ja Y_j:t ovat Hausdorffin avaruuksia. Osoita, että X on Hausdorff jos ja vain jokaista pisteparia $x, y \in X$ kohti, jolla $x \neq y$, on olemassa sellainen $j \in J$ että $f_j(x) \neq f_j(y)$.

4. (i) Milloin topologinen avaruus on säännöllinen?

(ii) Osoita, että avaruus $(\mathbf{R}, \tau_{\text{pa}})$ on säännöllinen (kyseessä on reaaliakseli varustettuna puoliavoimien välien $[a, b)$, $a < b$, virittämällä topologialla).

(iii) Periytyykö säännöllisyys suljettuihin osajoukkoihin (toisin sanoen, jos X on säännöllinen, onko jokainen epätyhjä suljettu osajoukko $A \subset X$ säännöllinen) ? Perustele vastauksesi lyhyesti hahmottelemalla todistus tai antamalla vastesimerkki.

5. Olkoot X ja Y ovat yhtenäisiä topologisia avaruuksia. Osoita, että tuloavaruus $X \times Y$ on myös yhtenäinen. [Opastus: Totea ensin, että 'liuska' $X \times \{y\}$ on homeomorfinen X:n kanssa ja vastaavasti 'liuska' $\{x\} \times Y$ on homeomorfinen Y:n kanssa.]

6. Olkoon X kompakti Hausdorffin avaruus ja olkoon $f : X \to X$ jatkuva. Osoita, että on olemassa suljettu ja epätyhjä X:n osajoukko $A \subset X$, jolle $f(A) = A$. [Opastus: tarkastele joukkojen $f(X)$, $f(f(X)), \ldots$ muodostamaa jonoa.]

TopologiaII.
LOPPUKOE (16.12.2008)

Valitse **vain toinen tehtävistä 5 ja 6**. Symboli I tarkoittaa reaaliakselin suljettua väliä $[0,1]$.

1. Esitä topologisen avaruuden määritelmä. Määrittele myös suljetut joukot ja sulkeuma. Osoita, aivan perusmääritelmistä lähtien, että topologisen avaruuden X mielivaltaisille osajoukoille $A, B \subset X$ pätee

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

2. Olkoon $f : X \to Y$ jatkuva surjektio topologisten avaruuksien X ja Y välillä. Osoita, että

(i) jos X on separoituva, niin myös Y on separoituva.

(ii) jos X:llä on Lindelöfin ominaisuus, niin sama pätee Y:lle.

3. Olkoon X topologinen avaruus ja (x_n) X:n jono, joka suppenee kohti pistettä $a \in X$. Osoita tarkasti, että joukko $A = \{a\} \cup \{ x_n : n \in \mathbf{N}\}$ on kompakti.

4. (i) Milloin topologinen avaruus on normaali? Periytyykö normaalius suljettuihin osajoukkoihin (toisin sanoen, jos X on normaali, onko jokainen epätyhjä suljettu osajoukko $A \subset X$ normaali) ? Perustele vastauksesi lyhyesti todistuksella tai vastesimerkillä.

(ii) Milloin topologinen avaruus on lokaalisti yhtenäinen? Periytyykö lokaalinen yhtenäisyys suljettuihin osajoukkoihin ? Perustele vastauksesi lyhyesti todistuksella tai vastesimerkillä.

5. Luhistetaan reaaliakselin $\mathbf{R}$ (varustettuna tavallisella topologialla) osajoukko $I = [0,1]$ pisteeksi, jolloin saatavaa avaruutta merkitään X/I. Osoita, tarkasti tekijätopologian määritelmää käyttäen, että X/I on homeomorfinen avaruuden $\mathbf{R}$ itsensä kanssa. Päteekö tulos jos I korvataan avoimella välillä $(0,1)$?

6. Olkoot topologiset avaruudet (X_k) $(k = 1, 2, \ldots)$ metrisoituvia. Osoita, että myös tuloavaruus $\prod_{k=1}^{\infty} X_k$ on metrisoituva.

Topologia II.
LOPPUKOE (03.03.2009)

Valitse vain toinen tehtävistä 5 ja 6.

1. Olkoot X_k:t topologisia avaruuksia jokaisella $k = 1, 2, \ldots$ Oletetaan lisäksi, että Y on topologinen avaruus ja kuvaukset $f_k : Y \to X_k$ ovat jatkuvia ($k = 1, 2, \ldots$). Näytä tulotopologian määritelmästä lähtien, että tällöin kuvaus $f : Y \to \prod_{k=1}^{\infty} X_k$ on jatkuva, kun määritellään

$$f(y) = (f_1(y), f_2(y), f_3(y), \ldots) \quad \text{kaikilla} \quad y \in Y.$$

2. Olkoot $A \subset X$ ja $B \subset X$, missä X on topologinen avaruus. Osoita, tarkasti (perusmääritelmiin nojautuen), että

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

3. Olkoot τ_1 ja τ_2 topologioita joukossa X. Ovatko seuraavat väitteet tosia? Perusteluksi todistus tai vastaesimerkki.

(i) Jos avaruus (X, τ_1) on yhtenäinen ja $\tau_1 \subset \tau_2$, niin avaruus (X, τ_2) on yhtenäinen.

(ii) Jos avaruus (X, τ_2) on yhtenäinen ja $\tau_1 \subset \tau_2$, niin avaruus (X, τ_1) on yhtenäinen.

4. (i) Määrittele lyhyesti topologisen avaruuden ominaisuudet : säännöllisyys, N_2-ominaisuus, kompaktisuus.

(ii) Mitkä (i)-kohdan ominaisuuksista ovat avaruudella $\mathbf{R} \times ([0,1]^{\mathbf{N}})$. Perustele vastauksesi lyhyesti esim. vetoamalla sopiviin kurssin lauseisiin.

5. Olkoon (X, τ) topologinen avaruus. Määritellään X:ssä uusi topologia τ_0 siten, että joukko $U \subset \tau_0$ jos sen komplementti on kompakti topologiassa τ tai jos $U = \emptyset$. Osoita, että τ_0 on X:n topologia, joka on karkeampi kuin τ. Osoita, että avaruus (X, τ_0) on kompakti, ja että (X, τ_0) on Hausdorff jos ja vain jos alkuperäinen avaruus (X, τ) on kompakti.

6. Olkoon X kompakti Hausdorffin avaruus ja olkoon $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ vähenevä jono avaruuden X suljettuja ja yhtenäisiä osajoukkoja. Osoita, että leikkaus $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ on yhtenäinen. [Ohje: tee vastaoletus: $E = E_1 \cup E_2$, missä epätyhjillä joukoilla E_1 ja E_2 on erilliset avoimet ympäristöt $U \cup V$. Tarkastele joukkoa $A_k \setminus (U \cup V)$ ja päättele, että on olemassa indeksi k_0 jolle viimeksikirjoitettu joukko on tyhjä.]

Topologia II
Loppukoe
19.5.2009

Voit valita mitkä tahansa viisi seuraavista tehtävistä.
Ellei muuta mainita, joukot $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{Q}$ on varustettu tavallisilla topologioillaan.

1. Merkitsemme kaikilla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ja $r > 0$ pisteen (x,y) avointa r-säteistä kiekkoympäristöä $\{(z,u) \in \mathbb{R}^2 : (z-x)^2 + (u-y)^2 < r^2\}$ symbolilla $U_r(x,y)$ ja merkitsemme edelleen
$$V_r(x,y) = \big\{(z,u) \in U_r(x,y) : u \geq y\big\} .$$
Osoita, että perhe $\big\{V_r(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ ja } r > 0\big\}$ on joukon $\mathbb{R}^2$ erään topologian τ kanta ja perustele vastauksesi seuraavaan kysymykseen: Onko avaruus $(\mathbb{R}^2, \tau)$ säännöllinen?

2. Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia ja $f : X \to Y$ jatkuva surjektio.
(a) Näytä, että jos X on yhtenäinen, niin myös Y on yhtenäinen.
(b) Osoita, että jos X on lokaalisti yhtenäinen ja f on avoin kuvaus, niin myös Y on lokaalisti yhtenäinen.

3. Tarkastelemme tuloavaruutta $X = \{0,1\}^{\mathbb{R}}$, missä avaruus $\{0,1\}$ on diskreetti. Voimme esittää X:n pisteet karakteristisina funktioina: $X = \{\chi_A : A \subset \mathbb{R}\}$. Näytä, että joukko $E = \{\chi_A : A \subset \mathbb{R} \text{ on diskreetti}\}$ on tiheä avaruudessa X. Näytä myös, ettei mikään joukon E pisteiden muodostama jono suppene kohti X:n pistettä $\chi_{\mathbb{R}}$.

4. Määrittelemme $\mathbb{R}^2$:n aliavaruudessa $S^1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ ekvivalenssirelaation $\backsim$ asettamalla $(x,y) \backsim (a,b) \iff |x| = |a|$ ja $|y| = |b|$. Osoita, että tekijäavaruus $S^1/\backsim$ on homeomorfinen $\mathbb{R}$:n aliavaruuden $\mathbb{I} = [0,1]$ kanssa.

5. ("Kirjan tehtävä") Muotoile *Urysohnin lemma* ja todista sen avulla *Urysohnin metristyslause*: *Jokainen säännöllinen N_2-avaruus on metristyvä.*

6. Olkoon kompakti Hausdorffin avaruus X *lokaalisti metristyvä* (eli jokaisella X:n pisteellä on metristyvä ympäristö). Näytä, että X on metristyvä.
[Ohje: Etsi aluksi sellainen äärellinen avoin peite $\mathcal{U}$, että $\overline{U}$ on metristyvä jokaisella $U \in \mathcal{U}$. Käytä lopuksi Urysohnin metristyslausetta]

7. Oletamme, että avaruuden X topologialla on sellainen esikanta $\mathcal{A}$, että jokaisella perheen $\mathcal{A}$ joukoista koostuvalla X:n peitteellä on äärellinen osapeite. Osoita, että X on kompakti.
[Vihje: X on kompakti, jos X:n jokaisella ultrafiltterillä on kasaantumispiste.]

8. Osoita, että T_1-avaruuden X jokaisella numeroituvalla avoimella peitteellä on äärellinen osapeite jos ja vain jos jokainen X:n suljettu ja diskreetti osajoukko on äärellinen.

Topologia II
Loppukoe
11.6.2009

Voit valita mitkä tahansa viisi seuraavista tehtävistä.
Ellei muuta mainita, joukot $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{Q}$ on varustettu tavallisilla topologioillaan.

1. Merkitsemme $\mathbb{J} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Näytä, että $\mathcal{B} = \big\{ \{x\} \cup \{z \in \mathbb{J} : |z - x| < \varepsilon\} : x \in \mathbb{R} \text{ ja } \varepsilon > 0 \big\}$ on joukon $\mathbb{R}$ erään topologian τ kanta ja perustele vastauksesi seuraavaan kysymykseen: Onko avaruus $(\mathbb{R}, \tau)$ säännöllinen?

2. Osoita, että tason $\mathbb{R}^2$ aliavaruus
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q} \iff y \in \mathbb{Q}\}$$
on lokaalisti yhtenäinen.

3. Olkoon S $\mathbb{R}$:n aliavaruus $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, ...\}$. Osoita, että tuloavaruuden $S^{\mathbb{R}}$ aliavaruus $\big\{ f \in S^{\mathbb{R}} : \text{ kuvauksen } f \text{ rajoittuma joukkoon } f^{-1}(S \setminus \{0\}) \text{ on injektio} \big\}$ on kompakti.

4. ("Kirjan tehtävä") Muotoile topologisten avaruuksien välisen kuvauksen $f : X \to Y$ kanonista hajotelmaa $f = f^* \circ p$ koskeva peruslause. Esitä myös määritelmät lauseessa esiintyville merkinnöille ja käsitteille.

5. Osoita, että Tehtävän 1 avaruus $(\mathbb{R}, \tau)$ toteuttaa 2. numeroituvuusaksioman N_2.

6. Olkoon $\mathcal{F}$ joukon $\mathbb{N}$ ultrafiltteri ja olkoon $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jono joukon $\mathbb{I}$ lukuja. Näytä, että on olemassa täsmälleen yksi sellainen $x \in \mathbb{I}$, että jokaisella $\epsilon > 0$ on voimassa $\{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| < \epsilon\} \in F$.

7. Olkoon X normaali yhtenäinen avaruus, jossa on enemmän kuin yksi piste. Osoita, että tällöin avaruudessa X on ylinumeroituva määrä pisteitä.

   [Ohje: Urysohnin lemma]

8. Oletamme, että avaruuden X jokainen avoin aliavaruus on Lindelöf-avaruus. Osoita, että avaruuden X jokainen aliavaruus on Lindelöf-avaruus.

9. Oletamme tunnetuksi, että euklidisen tason aliavaruus $S^1 = \{(\cos r, \sin r) : r \in \mathbb{R}\}$ ei ole kutistuva. Onko polku $\alpha \in \Omega\left(S^1, (1, 0)\right)$ nollahomotooppinen, kun

   (a) $\alpha(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$ jokaisella $s \in \mathbb{I}$?

   (b) $\alpha(s) = (\cos 4\pi|s - \frac{1}{2}|, \sin 4\pi|s - \frac{1}{2}|)$ jokaisella $s \in \mathbb{I}$?

   Perustele vastauksesi.