HY/Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Opettajalinjan työpaja I/kevät: Topologia I
Kurssikoe I
26.2.2008

Ratkaisut on perusteltava tarkasti — kuitenkin suhteessa tehtävän vaikeustasoon.

1. Osoita, että toinen inkluusioväittämistä

$$B \subset f f^{\leftarrow} B, \qquad f f^{\leftarrow} B \subset B$$

on totta aina, kun $f: X \to Y$ on kuvaus ja $B \subset Y$, mutta toinen ei (aina).

2. Tutki, onko funktio $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, jolle

$$f(x,y) = \sqrt{|x-y|},$$

metriikka $\mathbb{R}$:ssä?

3. Miten määritellään metrisen avaruuden X erakkopiste? Mitä tarkoittaa, että avaruus X on diskreetti? Osoita, että jos X on diskreetti avaruus, niin sen jokainen osajoukko A on avoin ja jokainen kuvaus $f: X \to Y$ on jatkuva.

Vaikkei ratkaisisi seuraavaa tehtävää kokonaan, sen yhteydessä voi ja kannattaa osoittaa ymmärtävänsä *metrisen avaruuden osajoukon* avoimuuden *määritelmän! Tämä on yksi tapa selvittää toinen kurssin kahdesta kynnyskysymyksestä.*

4. Olkoon $E = C[0,1]$ ja sen osajoukko

$$A = \{ f \in E : f(x) > 0 \text{ kaikille } 0 \le x \le 1 \}.$$

Onko A avoin E:ssä, kun E:n normina on (a) sup-normi, (b) L_1-normi?

Ohje: Kohdassa a käytä tietoa, että jatkuva funktio saa suljetulla välillä suurimman ja pienimmän arvonsa. Kohdassa b ota esim. vakiofunktio $x \mapsto 1$ ja osoita, että sen jokainen kuulaympäristö sisältää funktion $f \notin A$.

Tehtävää 4 varten muistutetaan mieliin, että $C[0,1]$ on jatkuvien funktioiden $[0,1] \to \mathbb{R}$ muodostama vektoriavaruus ja että se voidaan varustaa mm. normeilla $f \mapsto \sup\{ |f(x)| : x \in [0,1] \}$ ja $f \mapsto \int_0^1 |f(x)|\,dx$.