Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
Loppukoe
9.8.2007

1. Määritä reaaliakselin osajoukon $A = \{x \in [0,1] : x \in \mathbf{Q}\}$ reuna sekä sisä- ja ulkopisteiden joukot. Onko joukko A kompakti?

2. Voiko metrisessä avaruudessa olla voimassa jollakin pallolla $B(a,r) = S(a,r)$?

3. Olkoon $A \subset X$. Osoita, että: A on avoin $\iff$ $\partial A \cap A = \emptyset$.

4. Todista, että kompakti joukko on suljettu.

5. Onko olemassa sellaista kompaktia joukkoa $A \subset \mathbf{R}$, että $\mathbf{R} \setminus A$ on kompakti? Onko olemassa sellaista yhtenäistä joukkoa $A \subset \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$, että $\mathbf{R} \setminus A$ on yhtenäinen? Onko olemassa sellaista täydellistä joukkoa $A \subset \mathbf{R}$ ja $A \neq \emptyset, \mathbf{R}$, että $\mathbf{R} \setminus A$ on täydellinen?

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
Loppukoe (ylimääräinen)
19.12.2007

1. Miten määritellään joukon $A \subset X$ reuna ∂A? Jos $X = \mathbf{R}$ ja $A = \{0\}$, niin määritä ∂A.

2. Tutki, ovatko seuraavat funktiot f ja g metriikkoja reaaliakselilla:
(a) $f(x, y) = |x - y|^2$,
(b) $g(x, y) = \sqrt{|x - y|}$.

3. Anna esimerkki sellaisesta metrisestä avaruudesta X, pisteestä $a \in X$ ja säteestä r, että
(a) pallokuori $S(a, r)$ on tyhjä,
(b) $d(B(a, r)) < 2r$.

4.. Olkoon $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$. Osoita f on jatkuva silloin ja vain silloin kun f:n graafi $\{(x, f(x) : x \in [0, 1]\}$ on $\mathbf{R^2}$:n kompakti osajoukko.

5. Mitä tarkoitetaan joukon $E \subset X$ separaatiolla? Määritä joku rationaalilukujoukon $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ separaatio.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

TOPOLOGIA I

Loppukoe 4.3.2008

1. Miten määritellään metrisen avaruuden X sisäpisteiden joukko? Anna esimerkki joukosta $A \subset \mathbf{R}$, jolla ei ole sisäpisteitä.

2. Voiko metrisessä avaruudessa olla voimassa jollakin pallolla $B(a, r) = S(a, r)$?

2. Määritä joukon $A = \{0\} \cup (1, 2]$ reuna $\mathbf{R}$:n aliavaruudessa $[0, 2]$.

3. Todista, että metrisen avaruuden täydellinen osajoukko on suljettu.

4. Todista, että kompakti joukko on suljettu.

5. Olkoot $f, g : X \to Y$ jatkuvia kuvauksia ja $A \subset X$ sellainen joukko, että $f|A = g|A$. Osoita, että $f|\overline{A} = g|\overline{A}$.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
Loppukoe, 13. 5. 2008

1. Kun $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, merkitään

$$x * y = (|x_1| + |x_2|)(|y_1| + |y_2|),$$
$$\|x\| = \sqrt{x * x}$$

ja

$$d(x, y) = \begin{cases} \|x\| + \|y\|, & \text{kun } x \neq y \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

a) Onko $*$ vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ sisätulo?
b) Onko $\|\cdot\|$ vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ normi?
c) Onko d joukon $\mathbb{R}^2$ metriikka?

2. Esitä esimerkki tason $\mathbb{R}^2$ osajoukosta A, jolle $\emptyset \neq \operatorname{int} A \neq A \neq \bar{A}$.

3. Mitkä joukoista

$$A = \{ (x, 0) \mid x \in [0, 2\pi] \},$$
$$B = S^1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \} \text{ ja}$$
$$C = \{ (x, y) \in S^1 \mid y \geq 0 \}$$

ovat keskenään homeomorfisia?

4. Määrittele, mitä tarkoitetaan metrisen avaruuden Cauchyn jonolla ja mitä täydellisyydellä. Osoita, että suppenevat jonot ovat Cauchyn jonoja.

5. Merkitään $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 = 1 \}$ ja tarkastellaan kuvausta $f \colon A \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\mathrm{e}^y$.
a) Osoita, että A on kompakti.
b) Osoita, että f saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa joukossa A.

[Eksponenttifunktion jatkuvuus oletetaan tunnetuksi.]

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Topologia I
Loppukoe, 12. 6. 2008

1. Tarkastellaan tasojoukkoa

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 = 1 \}.$$

Määritä joukon A halkaisija, kun tasossa käytetään a) sup-normin $\|(x, y)\|_0 = \max\{|x|, |y|\}$, b) ℓ_1-normin $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$ määräämää metriikkaa.

2. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A \subset X$. Todista, että $\partial\partial A \subset \partial A$.

3. Merkitään $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^5 + 2}{10}.$$

Tarkastellaan lukujonoa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, missä $a_0 = 0$ ja $a_{n+1} = f(a_n)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Todista Banachin kiintopistelauseen avulla, että raja-arvo $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ on olemassa ja toteuttaa yhtälön $a^5 - 10a + 2 = 0$.

4. Esitä esimerkki jatkuvista kuvauksista $f\colon A \to \mathbb{R}$ ja $g\colon B \to \mathbb{R}$, missä
a) $A \subset \mathbb{R}^2$ on suljettu, mutta kuvajoukko $f[A]$ ei ole suljettu $\mathbb{R}$:ssä,
b) $B \subset \mathbb{R}^2$ on rajoitettu joukko, mutta kuvajoukko $g[B]$ on rajoittamaton (eli rajaton).
Voiko kohdissa a ja b käyttää samaa esimerkkiä, ts. onko mahdollista valita $f = g$ ja $A = B$?

5. Olkoon $f\colon [-2, 2] \times [-2, 2] \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = xy(x^3 + y^2).$$

Oletetaan tunnetuksi, että kuvauksen f määrittelyjoukko $[-2, 2] \times [-2, 2]$ on yhtenäinen. Todista, että yhtälöllä $f(x, y) = \pi$ on ratkaisu.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
Loppukoe, 14. 8. 2008

1. Olkoon E sisätuloavaruus ja $x, y \in E$. Todista suunnikassääntö

$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2.$$

2. Onko olemassa joukkoa $A \subset \mathbb{R}$, jolle $\partial\partial A \neq \partial A$?

3. Esitä esimerkki tason osajoukoista, jotka eivät ole homeomorfiset.

4. a) Muotoile Banachin kiintopistelause ja määrittele siinä esiintyvät käsitteet.
b) Asetetaan $f\colon [1,2] \to [1,2]$,

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right),$$

ja tarkastellaan lukujonoa $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, jolle $x_0 = 2$ ja $x_{n+1} = f(x_n)$ kaikilla $n \in \mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$. Osoita, että $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ on olemassa, ja määritä a.

5. Mitkä joukoista

$$A = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 = 1 \,\},$$
$$B = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2y^2 = 1 \,\} \text{ ja}$$
$$C = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 < 1 \,\}$$

ovat kompakteja?

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
Loppukoe
12.11.2008

1. Olkoon $X = (X, d)$ metrinen avaruus ja $U_1, \ldots, U_n$ sen avoimia osajoukkoja. Näytä, että $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ on avoin joukko.

2. Olkoot $A, B \subset X$, missä X on metrinen avaruus. Näytä, että $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

3. a) Ovatko ympyrä $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ja reaalijana $\mathbb{R}$ homeomorfiset? Todista väitteesi.
   b) Ovatko $[1, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < \infty\}$ ja $(1, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \infty\}$ homeomoriset? Todista väitteesi.

4. Näytä, että kompakti metrinen avaruus on täydellinen.

5. Näytä, että yhtenäisen joukon kuva jatkuvassa kuvauksessa on yhtenäinen.

Topologia I
Erilliskoe
12.5. 2009

1. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Määrittele käsitteet *avoin* joukko ja *suljettu* joukko. Anna esimerkki sellaisista joukoista A ja B sopivissa metrisissä avaruuksissa X, että
   (a) A on sekä avoin että suljettu X:ssä,
   (b) B ei ole avoin eikä suljettu X:ssä.

2. Olkoon $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \geq 0\}$. Määritä A:n sisäpisteiden joukko $int(A)$, reuna ∂A ja sulkeuma $\overline{A}$, kun tasossa $\mathbb{R}^2$ on tavallinen euklidinen metriikka. Perustele lyhyesti (perustelu voi myös nojautua sopiviin selittäviin kuviin).

3. (a) Määrittele käsite *homeomorfismi* $f : X \to Y$, kun X ja Y ovat metrisiä avaruuksia.
(b) Olkoon joukko
$$A = \{(x, e^x) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$
eksponenttifunktion $x \mapsto e^x$ kuvaaja ja $\psi(x) = (x, e^x)$ kun $x \in \mathbb{R}$. Näytä, että kuvaus ψ on homeomorfismi $\mathbb{R} \to A$. Joukoissa $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{R}^2$ on tavallinen metriikka.

4. Olkoon $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ sekä $f : A \to \mathbb{R}$ sellainen jatkuva kuvaus, että $f(x) \neq 0$ kaikilla $x \in A$. Näytä, että on olemassa sellainen vakio $c > 0$, että $|f(x)| \geq c$ kaikilla $x \in A$. *Vihje:* kompaktisuudesta on hyötyä.

5. Määrittele käsite *yhtenäinen* metrinen avaruus. Tutki, ovatko seuraavat joukot yhtenäisiä:
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 2|x|\},$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2|x|\}.$$
Tasossa $\mathbb{R}^2$ on tavallinen euklidinen metriikka. Perustele!

Topologia I
Erilliskoe
3.3. 2009

1. (i) Määrittele joukon $A \subset X$ sisäpiste, ulkopiste ja reunapiste, kun (X, d) on metrinen avaruus.
(ii) Määritä rationaalilukujen joukon $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ sisäpisteet, ulkopisteet ja reunapisteet. (Joukossa $\mathbb{R}$ on tavallinen metriikka, ja Analyysi -kurssin tiedot reaali- ja rationaaliluvuista saa pitää tunnettuina.)

2. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Näytä, että kuvaus

$$d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}, \quad x, y \in X,$$

on metriikka X:ssä. Osoita, että identtinen kuvaus id_X on homeomorfismi $(X, d) \to (X, d')$.

3. Olkoon $f : X \to Y$ kuvaus, missä X ja Y ovat metrisiä avaruuksia. Näytä, että f on jatkuva X:ssä jos ja vain jos

$$\overline{f^{-1}B} \subset f^{-1}\overline{B}$$

jokaisella joukolla $B \subset Y$.

4. Olkoot (X, d), (Y, d') metrisiä avaruuksia ja $f : X \to Y$ sellainen bijektio, että

$$M_1 d(x,y) \le d'(f(x), f(y)) \le M_2 d(x,y), \quad x, y \in X,$$

sopivilla vakioilla $0 < M_1 \le M_2 < \infty$. Näytä: jos (X, d) on täydellinen avaruus, niin myös (Y, d') on täydellinen.

5. (i) Määrittele *yhtenäinen* metrinen avaruus X.
(ii) Olkoon $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < |x|\}$. Tutki, onko A yhtenäinen, kun A on varustettu tason $\mathbb{R}^2$ euklidisen metriikan indusoimalla relatiivitopologialla. Perustele vastauksesi!

Topologia I
Erilliskoe
11.6. 2009

1. Olkoon e $\{0, 1\}$-metriikka lukusuoralla $\mathbb{R}$. Näytä, että yhtälö

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + e(x_2, y_2)$$

määrittelee metriikan tasossa $\mathbb{R}^2$. Määritä vastaavat avoimet kuulat $B_d(\overline{0}, 1)$ ja $B_d(\overline{0}, 2)$, missä $\overline{0} = (0, 0)$.

2. Näytä, että kuvaus h on jatkuva $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kun

$$h(x, y) = (\frac{xy}{1 + x^2}, \sin(xy)), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Tasossa $\mathbb{R}^2$ on euklidinen metriikka.

3. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A \subset X$ osajoukko. Määrittele *sisäpisteiden* joukko $int(A)$ ja *reunapisteiden* joukko ∂A. Näytä, että

$$int(A) = A \setminus \partial A.$$

4. (a) Määrittele *homeomorfismi* $f : X \to Y$, kun X ja Y ovat metrisiä avaruuksia.
(b) Olkoon $(E, |\cdot|)$ normiavaruus ja $E \neq \{\overline{0}\}$. Näytä, että kuvaus f,

$$f(x) = \frac{x}{|x|^2}, \quad x \in A,$$

on homeomorfismi $A \to B$, kun $A = \{x \in E : 0 < |x| < 1\}$, $B = \{x \in E : |x| > 1\}$. *Vihje:* käänteiskuvaus f^{-1} saadaan saman kaavan avulla.

5. (*teoria*) (a) Määrittele *kompakti* metrinen avaruus X.
(b) Osoita: jos X on kompakti metrinen avaruus ja $f : X \to Y$ on jatkuva bijektio, niin myös käänteiskuvaus f^{-1} on jatkuva $Y \to X$. *Muistutus:* kuvaus g on jatkuva jos ja vain jos jokaisen suljetun joukon F alkukuva $g^{-1}F$ on suljettu.