HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Topologia I
2. kurssikoe, 6. 5. 2008

1. Tarkastellaan joukkoa

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 7,\ y \geq 1 \} \subset \mathbb{R}^2.$$

Määritä joukon A sisus $\operatorname{int} A$, reuna ∂A, sulkeuma $\overline{A}$ ja ulkopisteiden joukko $\operatorname{ext} A$ tasossa $\mathbb{R}^2$.

2. Esitä esimerkki kahdesta homeomorfisesta metrisestä avaruudesta, joista toinen on rajoitettu ja toinen rajoittamaton.

3. a) Osoita, että kuvaus $f\colon [\frac{3}{2}, 2] \to [\frac{3}{2}, 2]$,

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right),$$

on kutistus.

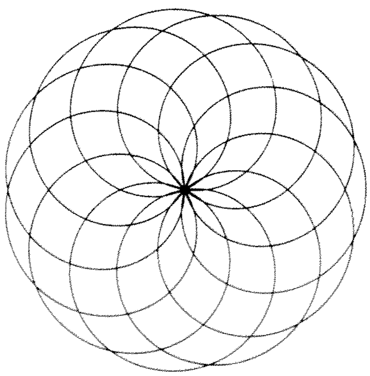
b) Miksi $[\frac{3}{2}, 2]$ on täydellinen?

c) Tarkastellaan lukujonoa $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, jolle $x_0 = 2$ ja $x_{n+1} = f(x_n)$ kaikilla $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Osoita, että $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ on olemassa, ja määritä a.

4. Kuvauksen $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$,

$$f(t) = (\cos t + \cos 12t, \sin t + \sin 12t),$$

arvojoukko $A = f[0, 2\pi]$ näkyy alla olevassa kuvassa. Onko A a) kompakti, b) yhtenäinen, c) avoin tasossa $\mathbb{R}^2$?



[Kuvauksen f tarvittavat ominaisuudet riittää todeta. Tason yhtenäisyyden saa olettaa tunnetuksi.]

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
2. kurssikoe, 13. 5. 2008 (korvaava)

1. Esitä esimerkki tason $\mathbb{R}^2$ osajoukosta A, jolle $\emptyset \neq \operatorname{int} A \neq A \neq \bar{A}$.

2. Mitkä joukoista

$$A = \{\, (x,0) \mid x \in [0, 2\pi] \,\},$$
$$B = S^1 = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \,\} \text{ ja}$$
$$C = \{\, (x,y) \in S^1 \mid y \geq 0 \,\}$$

ovat keskenään homeomorfisia?

3. Määrittele, mitä tarkoitetaan metrisen avaruuden Cauchyn jonolla ja mitä täydellisyydellä. Osoita, että suppenevat jonot ovat Cauchyn jonoja.

4. Osoita, että $A = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 = 1 \,\}$ on kompakti avaruus.

Korvaavan kurssikokeen kesto on 2 tuntia. Koska korvaavan kokeen tehtäväsarja on osajoukko loppukokeen tehtäväsarjasta (esim. tehtävä 4 on loppukokeen 5a), niin tätä koetta suorittava voi kuitenkin halutessaan vaivatta siirtyä suorittamaan topologian erilliskoetta (eli loppukoetta), jonka koeaika on 4 tuntia.

Topologia I
2. kurssikoe
28.4. 2009

1. Määritä sisäpisteiden joukko $int(A)$ ja reuna ∂A kun

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y > 0\}.$$

Perustele vastauksesi! Tasossa $\mathbb{R}^2$ on euklidinen etäisyys.

2. Olkoon $|\cdot|_2$ euklidinen normi tasossa $\mathbb{R}^2$ ja

$$B(\bar{0}, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

vastaava avoin kuula. Määritellään kuvaukset $f : B(\bar{0}, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sekä $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow B(\bar{0}, 1)$ asettamalla

$$f(u) = \frac{u}{1 - |u|_2}, \quad g(v) = \frac{v}{1 + |v|_2},$$

kun $u \in B(\bar{0}, 1)$ ja $v \in \mathbb{R}^2$. Näytä, että f on homeomorfismi $B(\bar{0}, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^2$. *Vihje:* kannattaa ensin todeta, että $g = f^{-1}$ laskemalla $f \circ g$ ja $g \circ f$.

3. (*teoriatehtävä*) (a) Määrittele *kompakti* metrinen avaruus X.
(b) Näytä: jos X on kompakti metrinen avaruus, Y metrinen avaruus sekä $f : X \longrightarrow Y$ jatkuva kuvaus, niin kuvajoukko fX on kompakti.

4. Olkoon

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2\}.$$

Tutki, onko joukko A (a) kompakti, (b) täydellinen. Avaruudessa $\mathbb{R}^3$ on euklidinen etäisyys.