Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
2. välikoe
13. 5. 2004

1. Todista, että tason aliavaruudet

$$A = \{ (0,y) \mid y \geq 0 \} \cup \{ (x,0) \mid x \geq 0 \}$$

ja

$$B = \{ (x,0) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

ovat homeomorfiset.

2. a) Osoita, että jokainen metrisen avaruuden suppeneva jono on Cauchy-jono.
   b) Osoita, että jokainen metrisen avaruuden Cauchy-jono on rajoitettu.
3. Olkoon

$$f \colon A \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x + xy - (x^2 + y^2)^2,$$

missä $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \}$. Todista, että kuvaus f saa suurimman ja pienimmän arvonsa määrittelyjoukossaan.

4. Esitä esimerkki avaruuden $\mathbb{R}$ epäyhtenäisistä joukoista A ja B, joiden yhdiste $A \cup B$ on yhtenäinen.

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
2. välikoe (korvaava)
25. 5. 2004

1. Esitä esimerkki homeomorfisista metrisistä avaruuksista, jotka eivät ole isometrisiä.

2. Merkitään $f\colon [1,2] \to [1,2]$,

$$f(x) = \frac{1}{2}(x + 2/x).$$

Määritellään reaalilukujono $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ asettamalla $a_0 = 1$ ja $a_{n+1} = f(a_n)$, kun $n \in \mathbb{N}$.

a) Todista, että f on kutistus eli L-lipschitzkuvaus jollakin $L < 1$.

b) Todista (esim. Banachin kiintopistelauseen avulla), että jono $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee $\mathbb{R}$:ssä, mutta ei $\mathbb{Q}$:ssa.

3. Milloin diskreetti metrinen avaruus, jossa on $\{0,1\}$-metriikka, on a) täydellinen, b) kompakti, c) yhtenäinen?

4. Määritä tason $\mathbb{R}^2$ osajoukon

$$A = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| < \sin x \,\}$$

komponentit.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
2. välikoe
13.5.2005

1. Olkoot $A = \{(x, y) \in \mathsf{R}^2 : x + y = 1\}$ ja $f\colon A \to \mathsf{R}$ kuvaus
$$f(x, y) = x, \text{ kun } (x, y) \in A.$$
Tutki, onko f
   a) homeomorfismi,
   b) isometria.

2. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia, joista X on kompakti, ja olkoon $f\colon X \to Y$ jatkuva. Osoita, että jos $A \subset X$ on täydellinen, niin fA on kompakti. Anna esimerkki, joka osoittaa, että tulos ei päde, jos X ei ole kompakti.

3. Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $A \subset X$, ja (x_n) jono A:ssa. Osoita, että jonon jokainen kasautumisarvo kuuluu joukkoon $\overline{A}$.

4. Esitä metrisen avaruuden X *komponentin* ja X:n osajoukon E *separaation* määritelmät. Osoita, että jos metrisellä avaruudella X on separaatio $X = A \,|\, B$ ja jos C on X:n eräs komponentti, niin C sisältyy toiseen ja vain toiseen joukoista A ja B.

Vastaa kurssikyselyyn `http://mathstat.helsinki.fi/kurssit/kysely/`

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
2. välikoe (ylimääräinen)
17.5.2005

1. Olkoon $f : [0,1] \to \mathsf{R}$ kuvaus
$$f(x) = e^x, \text{ kun } x \in [0,1].$$
Tutki, onko f
 a) bilipschitz,
 b) upotus.

2. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia, ja olkoon $f\colon X \to Y$ jatkuva. Osoita, että jos $A, B \subset X$ ovat yhtenäisiä ja $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$, niin $f(\overline{A \cup B})$ on yhtenäinen. Anna esimerkki, joka osoittaa, että tulos ei päde, jos f ei ole jatkuva.

3. Olkoon (X, d) kompakti metrinen avaruus ja (x_n) X:n jono, jolla on täsmälleen yksi kasautumisarvo a. Osoita, että $x_n \to a$.

4. Esitä määritelmät rajoitetun lineaarikuvauksen $A : E \to F$ *normille* $|A|$ ja *luvulle* $l(A)$, kun E ja F ovat normiavaruuksia. Osoita, että jos $A : E \to F$ on rajoitettu lineaarikuvaus, niin
$$l(A)|x| \leq |Ax| \leq |A||x|$$
kaikilla $x \in E$.

Vastaa kurssikyselyyn `http://mathstat.helsinki.fi/kurssit/kysely/`

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
2. kurssikoe, 3.5.2006

1. Asetetaan R:n osajoukot $A = [0,1]$, $B = [1,3]$ ja $C = B \setminus \{2\}$. Tutki, ovatko
   (a) A ja B homeomorfiset,
   (b) A ja C homeomorfiset.

2. Tutki, onko joukko
$$D = \{(x,y) \in \mathsf{R}^2 : x^2 + y \leq 1\}$$
   (a) kompakti,
   (b) täydellinen.

3. Olkoon C metrisen avaruuden (X,d) komponentti ja $a \in X$. Osoita, että jos (x_n) on sellainen X:n jono, että $x_n \to a$ ja $x_n \notin C$ vain äärellisen monella indeksillä $n \in \mathsf{N}$, niin $a \in C$.

4. Olkoot (X,d) ja (Y,d') metrisiä avaruuksia ja olkoon $A \subset X$.
   (a) Esitä määritelmä kuvauksen $f\colon A \to Y$ *raja-arvolle pisteessä* $a \in \overline{A}$ *pitkin joukkoa* A.
   (b) Osoita, että jos $b = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$, niin $b \in \overline{fA}$.

Vastaa kurssikyselyyn

`http://mathstat.helsinki.fi/kurssit/kysely/`

heti tentin jälkeen!

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
2. kurssikoe (korvaava), 10.5.2006

1. Olkoon $f\colon [0,1] \to \mathsf{R}$,
$$f(x) = x^2 + x + 1, \quad x \in [0,1].$$
Tutki, onko f
(a) bilipschitz,
(b) isometria.

2. Olkoot
$$A = \{(x,y) \in \mathsf{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$$
ja $B = \overline{B}^2(\overline{0}, 1)$ tason suljettu yksikkökiekko. Tutki, onko $A \cup B$
(a) yhtenäinen,
(b) kompakti,
(c) täydellinen.

3. Osoita, että metrisen avaruuden (X,d) jonon (x_n) kasautumisarvojen joukko on suljettu.

4. (a) Olkoot (X,d) ja (Y,d') metrisiä avaruuksia. Esitä X:ssä *tasaisesti jatkuvan* kuvauksen $f\colon X \to Y$ määritelmä.
(b) Olkoon $A_j = \{(x,y) \in \mathsf{R}^2 : xy = j\}$, missä $j = 0$ tai 1, ja $X = A_0 \cup A_1$. Osoita, että yhtälö $f(x,y) = xy$ määrittelee jatkuvan funktion $f\colon X \to \mathsf{R}$, joka on tasaisesti jatkuva joukoissa A_0 ja A_1, mutta ei koko X:ssä.

Vastaa kurssikyselyyn

`http://mathstat.helsinki.fi/kurssit/kysely/`

heti tentin jälkeen!

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
2. kurssikoe
3.5.2007 klo 13-15

1. Miten määritellään joukon $A \subset X$ reuna ∂A? Jos $X = \mathbf{R}$ ja $A = \{0\}$, niin määritä ∂A.

2. Mitä tarkoitetaan kontraktiolla $f : X \to Y$? Anna esimerkit sellaisista kuvauksista $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, että (a) f on kontraktio ja (b) f ei ole kontraktio.

3. Olkoon $f : [0,1] \to \mathbf{R}$. Osoita f on jatkuva silloin ja vain silloin kun f:n graafi $\{(x, f(x) : x \in [0,1]\}$ on $\mathbf{R}^2$:n kompakti osajoukko.

4. Mitä tarkoitetaan joukon $E \subset X$ separaatiolla? Määritä joku rationaalilukujoukon $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ separaatio.