

1. Todista, että tason aliavaruudet

$$A = \{(0, y) \mid y \geq 0\} \cup \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$$

ja

$$B = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

ovat homeomorfisiet.

2. a) Osoita, että jokainen metrisen avaruuden suppeneva jono on Cauchy-jono.
b) Osoita, että jokainen metrisen avaruuden Cauchy-jono on rajoitettu.

3. Olkoon

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x + xy - (x^2 + y^2)^2,$$

missä $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Todista, että kuvaus f saa suurimman ja pienimmän arvonsa määrittelyjoukossaan.

4. Esitä esimerkki avaruuden \mathbb{R} epäyhtenäisistä joukoista A ja B , joiden yhdiste $A \cup B$ on yhtenäinen.

1. Esitä esimerkki homeomorfisista metrisistä avaruuksista, jotka eivät ole isometrisiä.
2. Merkitään $f: [1, 2] \rightarrow [1, 2]$,

$$f(x) = \frac{1}{2}(x + 2/x).$$

Määritellään reaalilukujono $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ asettamalla $a_0 = 1$ ja $a_{n+1} = f(a_n)$, kun $n \in \mathbb{N}$.

- a) Todista, että f on kutistus eli L -lipschitzkuvaus jollakin $L < 1$.
 - b) Todista (esim. Banachin kiintopistelauseen avulla), että jono $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suppenee \mathbb{R} :ssä, mutta ei \mathbb{Q} :ssa.
3. Milloin diskreetti metrinen avaruus, jossa on $\{0, 1\}$ -metriikka, on a) täydellinen, b) kompakti, c) yhtenäinen?
 4. Määritä tason \mathbb{R}^2 osajoukon

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| < \sin x \}$$

komponentit.



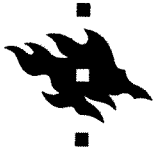
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
2. välikoe
13.5.2005

1. Olkoot $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$ ja $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ kuvaus
$$f(x, y) = x, \text{ kun } (x, y) \in A.$$

Tutki, onko f

- a) homeomorfismi,
- b) isometria.

2. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia, joista X on kompakti, ja olkoon $f: X \rightarrow Y$ jatkuva. Osoita, että jos $A \subset X$ on täydellinen, niin fA on kompakti. Anna esimerkki, joka osoittaa, että tulos ei päde, jos X ei ole kompakti.
3. Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $A \subset X$, ja (x_n) jono A :ssa. Osoita, että jonon jokainen kasautumisarvo kuuluu joukkoon \overline{A} .
4. Esitä metrisen avaruuden X *komponentin* ja X :n osajoukon E *separaation* määritelmät. Osoita, että jos metrisellä avaruudella X on separaatio $X = A|B$ ja jos C on X :n eräs komponentti, niin C sisältyy toiseen ja vain toiseen joukoista A ja B .



Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
2. välikoe (ylimääräinen)
17.5.2005

1. Olkoon $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ kuvaus

$$f(x) = e^x, \text{ kun } x \in [0, 1].$$

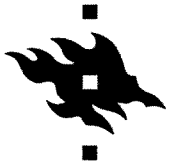
Tutki, onko f

- a) bilipschitz,
- b) upotus.

2. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia, ja olkoon $f : X \rightarrow Y$ jatkuva. Osoita, että jos $A, B \subset X$ ovat yhtenäisiä ja $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$, niin $f(\overline{A \cup B})$ on yhtenäinen. Anna esimerkki, joka osoittaa, että tulos ei päde, jos f ei ole jatkuva.
3. Olkoon (X, d) kompakti metrinen avaruus ja (x_n) X :n jono, jolla on täsmälleen yksi kasautumisarvo a . Osoita, että $x_n \rightarrow a$.
4. Esitä määritelmät rajoitetun lineaarikuvauksen $A : E \rightarrow F$ normille $|A|$ ja luvulle $l(A)$, kun E ja F ovat normiavaruuksia. Osoita, että jos $A : E \rightarrow F$ on rajoitettu lineaarikuvaus, niin

$$l(A)|x| \leq |Ax| \leq |A||x|$$

kaikilla $x \in E$.



1. Asetetaan \mathbb{R} :n osajoukot $A = [0, 1]$, $B = [1, 3]$ ja $C = B \setminus \{2\}$. Tutki, ovatko
 - (a) A ja B homeomorfiset,
 - (b) A ja C homeomorfiset.

2. Tutki, onko joukko

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y \leq 1\}$$

- (a) kompakti,
 - (b) täydellinen.
3. Olkoon C metrisen avaruuden (X, d) komponentti ja $a \in X$. Osoita, että jos (x_n) on sellainen X :n jono, että $x_n \rightarrow a$ ja $x_n \notin C$ vain äärellisen monella indeksillä $n \in \mathbb{N}$, niin $a \in C$.
 4. Olkoot (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia ja olkoon $A \subset X$.
 - (a) Esitä määritelmä kuvauksen $f: A \rightarrow Y$ raja-arvolle pisteessä $a \in \overline{A}$ pitkin joukkoa A .
 - (b) Osoita, että jos $b = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x)$, niin $b \in \overline{fA}$.

Vastaa kurssikyselyyn

<http://mathstat.helsinki.fi/kurssit/kysely/>

heti tentin jälkeen!



1. Olkoon $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2 + x + 1, \quad x \in [0, 1].$$

Tutki, onko f

- (a) bilipschitz,
- (b) isometria.

2. Olkoot

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$$

ja $B = \overline{B}^2(\bar{0}, 1)$ tason suljettu yksikkökierros. Tutki, onko $A \cup B$

- (a) yhtenäinen,
- (b) kompakti,
- (c) täydellinen.

3. Osoita, että metrisen avaruuden (X, d) jonon (x_n) kasautumisarvojen joukko on suljettu.

4. (a) Olkoot (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia. Esitä X :ssä *tasaisesti jatkuvan* kuvauksen $f: X \rightarrow Y$ määritelmä.

(b) Olkoon $A_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = j\}$, missä $j = 0$ tai 1 , ja $X = A_0 \cup A_1$. Osoita, että yhtälö $f(x, y) = xy$ määrittelee jatkuvan funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, joka on tasaisesti jatkuva joukoissa A_0 ja A_1 , mutta ei koko X :ssä.

Vastaa kurssikyselyyn

<http://mathstat.helsinki.fi/kurssit/kysely/>

heti tentin jälkeen!

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Topologia I

2. kurssikoe

3.5.2007 klo 13-15

1. Miten määritellään joukon $A \subset X$ reuna ∂A ? Jos $X = \mathbf{R}$ ja $A = \{0\}$, niin määritä ∂A .
2. Mitä tarkoitetaan kontraktiolla $f : X \rightarrow Y$? Anna esimerkit sellaisista kuvauksista $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, että (a) f on kontraktio ja (b) f ei ole kontraktio.
3. Olkoon $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$. Osoita f on jatkuva silloin ja vain silloin kun f :n graafi $\{(x, f(x)) : x \in [0, 1]\}$ on \mathbf{R}^2 :n kompakti osajoukko.
4. Mitä tarkoitetaan joukon $E \subset X$ separaatiolla? Määritä joku rationaalilukujoukon $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ separaatio.