HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
1. kurssikoe, 26. 2. 2008

1. Olkoon E sisätuloavaruus. Sisätuloavaruuden tuntemiseksi riittää tietää vektoriavaruuden rakenteen lisäksi yksi seuraavista: sisätulo, normi tai metriikka. Selitä kussakin tapauksessa, miten kaksi muuta määritetään, kun yksi näistä tunnetaan. (Selitykseksi tarvitaan siis esimerkiksi 6 kaavaa ja niihin liittyvät lyhyet selvitykset).

2. Merkitään
$$A = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ x^2 + y^2 \geq 1 \,\}.$$
Onko A tason $\mathbb{R}^2$ avoin osajoukko?

3. a) Olkoon E epätriviaali normiavaruus, ts. $E \neq \{\bar{0}\}$, ja $r \geq 0$. Osoita, että E:ssä on pisteet a ja b, joiden etäisyys toisistaan on r.
b) Esitä esimerkki metrisestä avaruudesta (X, d), jonka metriikka ei voi olla joukon X minkään normin määräämä.

4. Osoita, että kuvaus $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
$$f(x, y, z) = x + \mathrm{e}^y z,$$
on jatkuva, kun eksponenttifunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$, jatkuvuus oletetaan tunnetuksi. Onko f Lipschitz-kuvaus?

HY/Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Opettajalinjan työpaja I/kevät: Topologia I
Kurssikoe I
26.2.2008

Ratkaisut on perusteltava tarkasti — kuitenkin suhteessa tehtävän vaikeustasoon.

1. Osoita, että toinen inkluusioväittämistä

$$B \subset ff^{\leftarrow}B, \qquad ff^{\leftarrow}B \subset B$$

on totta aina, kun $f\colon X \to Y$ on kuvaus ja $B \subset Y$, mutta toinen ei (aina).

2. Tutki, onko funktio $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, jolle

$$f(x,y) = \sqrt{|x-y|},$$

metriikka $\mathbb{R}$:ssä?

3. Miten määritellään metrisen avaruuden X erakkopiste? Mitä tarkoittaa, että avaruus X on diskreetti? Osoita, että jos X on diskreetti avaruus, niin sen jokainen osajoukko A on avoin ja jokainen kuvaus $f\colon X \to Y$ on jatkuva.

Vaikkei ratkaisisi seuraavaa tehtävää kokonaan, sen yhteydessä voi ja kannattaa osoittaa ymmärtävänsä *metrisen avaruuden osajoukon* avoimuuden *määritelmän! Tämä on yksi tapa selvittää toinen kurssin kahdesta kynnyskysymyksestä.*

4. Olkoon $E = C[0,1]$ ja sen osajoukko

$$A = \{\, f \in E : f(x) > 0 \text{ kaikille } 0 \le x \le 1 \,\}.$$

Onko A avoin E:ssä, kun E:n normina on (a) sup-normi, (b) L_1-normi?

Ohje: Kohdassa a käytä tietoa, että jatkuva funktio saa suljetulla välillä suurimman ja pienimmän arvonsa. Kohdassa b ota esim. vakiofunktio $x \mapsto 1$ ja osoita, että sen jokainen kuulaympäristö sisältää funktion $f \notin A$.

Tehtävää 4 varten muistutetaan mieliin, että $C[0,1]$ on jatkuvien funktioiden $[0,1] \to \mathbb{R}$ muodostama vektoriavaruus ja että se voidaan varustaa mm. normeilla $f \mapsto \sup\{\, |f(x)| : x \in [0,1] \,\}$ ja $f \mapsto \int_0^1 |f(x)|\, dx$.

Topologia I
1. kurssikoe
24.2. 2009

1. Tutki, onko kuvaus

$$d(x,y) = |x_1^3 - y_1^3| + |x_2^3 - y_2^3|,$$

missä $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, metriikka joukossa $\mathbb{R}^2$.

2. Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $\emptyset \neq A \subset X$ osajoukko ja $r > 0$. Näytä: jos joukon A läpimitta on $d(A) \leq r$ ja $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ jollakin $x \in X$, niin $A \subset B(x, 2r)$. (Edellä $B(x, s) = \{y \in X : d(y, x) < s\}$ on avoin s-säteinen kuula.)

3. (*teoria*) Olkoot (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia, sekä $f : X \to Y$ kuvaus.
(i) Määrittele kuvauksen f jatkuvuus pisteessä $a \in X$.
(ii) Olkoon $d'(f(x), f(y)) \leq M d(x, y)$ kaikilla $x, y \in X$, missä $M > 0$ on vakio. Näytä, että f on jatkuva X:ssä.

4. Olkoon $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ ja $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 3\}$. Näytä, että A ja B ovat euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^2$ suljettuja osajoukkoja, ja laske joukkojen välinen etäisyys $d(A, B)$ euklidisen metriikan d suhteen.

Topologia I
1. kurssikoe (korvaava)
3.3. 2009
Huom.: koeaika 2 tuntia

1. Tutki, onko kuvaus

$$d(s,t) = \ln(1 + |s - t|), \quad s, t \in \mathbb{R},$$

metriikka joukossa $\mathbb{R}$. Logaritmifunktion $x \mapsto \ln(x)$ perusominaisuudet saa pitää tunnettuina.

2. Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $\emptyset \neq A \subset X$ osajoukko ja $r > 0$. Näytä: jos joukon A läpimitta on $d(A) \leq r$ ja $\overline{B}(x, r) \cap A \neq \emptyset$ jollakin $x \in X$, niin $A \subset \overline{B}(x, 2r)$. (Edellä $\overline{B}(x, s) = \{y \in X : d(y, x) \leq s\}$ on suljettu s-säteinen kuula.)

3. (*teoria*) Olkoot (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia, sekä $f : X \to Y$ kuvaus.
(i) Määrittele kuvauksen f jatkuvuus pisteessä $a \in X$.
(ii) Olkoon $d'(f(x), f(y)) \leq M d(x, y)$ kaikilla $x, y \in X$, missä $M > 0$ on vakio. Näytä, että f on jatkuva X:ssä.

4. Näytä, että joukko

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x + y + z < 1 + x^2 + y^2 + z^2\}$$

on avoin, ja joukko

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 + x^2 + y^2 \leq z \leq 3 + x^2 + y^2\}$$

on suljettu euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^3$.