Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
1. välikoe (korvaava)
16. 3. 2004

1. Osoita, että kuvaus

$$e\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ e(x, y) = \sqrt{|x - y|},$$

määrää metriikan reaaliakselilla.

2. Esitä metristen avaruuksien välisen lipschitzkuvauksen määritelmä. Anna esimerkki jatkuvasta kuvauksesta, joka ei ole lipschitzkuvaus.

3. Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$ sellaisia, että $a^2 + b^2 > 0$, ja olkoon

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |ax + by| = 1\}.$$

Onko A a) avoin, b) suljettu?

4. Olkoon $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \text{ ja } |y| \leq 1\}$, ja olkoon $A = \{(x, y) \in X : x > 0 \text{ ja } y > 0\}$. Määritä A:n sisä-, ulko- ja reunapisteet sekä sulkeuma X:ssä. Tässä tehtävässä ei tarvitse antaa tarkkaa perustelua, mutta jokin selvitys, joka voi perustua kuvaan, tulee antaa.

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
1. välikoe
5.4.2004

1. Esitä esimerkki tason osajoukosta, joka ei ole avoin eikä suljettu. Perustele väitteesi määritelmien avulla.
2. Kun $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, merkitään

$$x * y = (|x_1| + |x_2|)(|y_1| + |y_2|),$$

$$\|x\| = \sqrt{x * x}$$

ja

$$d(x,y) = \begin{cases} \|x\| + \|y\|, & \text{kun } x \neq y \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

   a) Onko $*$ vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ sisätulo?
   b) Onko $\|\cdot\|$ vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ normi?
   c) Onko d joukon $\mathbb{R}^2$ metriikka?
3. Todista huolellisesti, että

$$\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sin x \geq y^2 + z^2 \}$$

   on avaruuden $\mathbb{R}^3$ suljettu osajoukko. Sinin jatkuvuus oletetaan tunnetuksi.
4. Metrisen avaruuden (X, d) osajoukko A on *harva*, jos $\mathrm{int}\overline{A} = \emptyset$. Todista, että kahden harvan joukon yhdiste on harva.

Huom! Tehtävissä 1 ja 3 euklidisessa avaruudessa käytetään luonnollista metriikkaa.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
1. välikoe
10.3.2005

1. Olkoot $a \in \mathsf{N}$ ja $A = [-a, a] = \{x \in \mathsf{R} : -a \leq x \leq a\}$, ja olkoon d R:n tavallinen metriikka. Tutki, määritteleekö kuvaus
   a) $e \colon A \times A \to \mathsf{R}_+$,
   $$e(x, y) = d(-x, -y), \text{ kun } x, y \in A,$$
   b) $e' \colon A \times A \to \mathsf{R}_+$,
   $$e'(x, y) = d(x, 0) + d(y, 0), \text{ kun } x, y \in A,$$
   metriikan A:ssa.

2. Olkoon
   $$A = \overline{B}(\bar{0}, 1) \setminus \{\bar{0}\} = \{(x, y) \in \mathsf{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$$
   tason origossa punkteerattu suljettu yksikkökiekko.
   a) Tutki avoimen ja suljetun joukon määritelmiin perustuen, onko A avoin tai suljettu R^2:ssa.
   b) Määritä A:n kasautumispisteet.

3. Olkoot
   $$X = \{(x, y) \in \mathsf{R}^2 : 0 \leq y < 1\}$$
   ja
   $$A = \{(x, y) \in X : 0 < x \leq 1\}.$$
   Määritä A:n sisä-, ulko- ja reunapisteet X:ssä sekä sulkeuma X:ssä. Tässä tehtävässä ei tarvitse antaa tarkkaa perustelua, mutta jokin selvitys, joka voi perustua kuvaan, tulee antaa.

4. Esitä metrisen avaruuden (X, d) osajoukon $A \subset X$ *erakkopisteen* määritelmä. Olkoot (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia. Osoita, että jokainen kuvaus $f \colon X \to Y$ on jatkuva jokaisessa X:n erakkopisteessä.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
1. välikoe (ylimääräinen)
17.3.2005

1. Määritellään kuvaus $d\colon \mathsf{R}^2 \times \mathsf{R}^2 \to \mathsf{R}_+$ asettamalla
$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x = y, \\ 1 + |x-y|, & \text{kun } x \neq y, \end{cases}$$
missä $|\cdot|$ on R^2:n tavallinen normi.
   a) Osoita, että d on metriikka R^2:ssa.
   b) Määritä tässä metriikassa origokeskiset avoimet kuulat $B_d(\bar{0}, r)$, kun r saa arvot 1, 2 ja 3.

2. Määritellään kuvaus $f\colon \mathsf{R}^2 \to \mathsf{R}$ asettamalla
$$f(x,y) = x + y, \text{ kun } (x,y) \in \mathsf{R}^2.$$
   a) Osoita, että f on jatkuva.
   b) Onko
$$f^{-1}[0,1] = f^{-1}\{z \in \mathsf{R} : 0 \leq z \leq 1\}$$
   suljettu R^2:ssa?

3. Olkoot
$$X = \{(x,y) \in \mathsf{R}^2 : |x| \leq 1 \text{ ja } |y| < 1\}$$
ja
$$A = \{(x,y) \in X : x > 0 \text{ ja } y \geq 0\}.$$
Määritä A:n sisä-, ulko- ja reunapisteet X:ssä sekä sulkeuma X:ssä. Tässä tehtävässä ei tarvitse antaa tarkkaa perustelua, mutta jokin selvitys, joka voi perustua kuvaan, tulee antaa.

4. Esitä metristen avaruuksien (X,d) ja (Y,d') välisen *Lipschitz-kuvauksen* määritelmä. Osoita, että vakiokuvaus $g\colon X \to Y$ on Lipschitz. Anna esimerkki Lipschitz-kuvauksesta $f\colon X \to Y$ ja avoimesta joukosta $A \subset X$, jonka kuva fA ei ole avoin Y:ssä.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
1. kurssikoe, 28.2.2006 klo 13–15

1. Olkoon $d(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$, kun $x = (x_1, x_2) \in \mathsf{R}^2$ ja $y = (y_1, y_2) \in \mathsf{R}^2$. Osoita, että d on metriikka tasossa R^2. Määritä tässä metriikassa pallo $S_d((1,1),1) = \{x \in \mathsf{R}^2 : d(x,(1,1)) = 1\}$.

2. Tutki, onko joukko $A = \{(x,y) \in \mathsf{R}^2 : y \neq x\} \subset \mathsf{R}^2$ suljettu. Entä onko A avoin? Määritä A:n kasautumispisteet. Tarkat perustelut!

3. Olkoon $X = \{(x,y) \in \mathsf{R}^2 : |x| \leq 1 \text{ ja } |y| \leq 1\}$. Määritä X:n osajoukon $A = \{(x,y) \in X : 0 < x \leq 1 \text{ ja } 0 < y \leq 1\}$ sisäpisteet, reuna ja sulkeuma avaruudessa X. Tässä tehtävässä ei tarvitse antaa tarkkaa perustelua, mutta jokin selvitys, joka voi perustua kuvaan, tulee antaa.

4. (a) Olkoot (X,d) ja (Y,d') metrisiä avaruuksia. Esitä *Lipschitz-kuvauksen* $f\colon X \to Y$ määritelmä.
   (b) Olkoon E sisätuloavaruus ja $a \in E$. Osoita, että yhtälön $f(x) = x \cdot a$ määrittelemä kuvaus $f\colon E \to \mathsf{R}$ on Lipschitz.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
1. kurssikoe
27.2.2007 klo 13-15

1. Olkoon X metrinen avaruus ja $x \in X$. Näytä, että $X \setminus \{x\}$ on avoin.

2. Olkoon $C[0,1]$ välillä $[0,1]$ määriteltyjen jatkuvien reaaliarvoisten funktioiden muodostama normiavaruus normina $\| f \| = \max\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$. Näytä, että seuraavat kuvaukset ovat jatkuvia:
(*a*) $\alpha : C[0,1] \to \mathbf{R}$, $\alpha(f) = f(0)$.
(*b*) $\beta : C[0,1] \to C[0,1]$, $\beta(f)(x) = xf(x)$, $x \in [0,1]$.

3. Miten määritellään metrisen avaruuden osajoukon A sulkeuma $\overline{A}$? Todista, että kaikille $A, B \subset X$ pätee $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

4. Miten määritellään metriikka joukossa X? Olkoon $d : X \times X \to \mathbf{R}$ kuvaus, joka toteuttaa ehdot $d(x,y) = 0 \iff x = y$ ja $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$ kaikilla $x, y, z \in X$. Näytä, että kuvausta d voidaan käyttää metriikan määrittelyyn X:ssä.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
Korvaava 1. kurssikoe
12.4.2007

1. Miten määritellään metrisen avaruuden erakkopiste? Osoita, että jokainen kuvaus $f : X \to Y$ on jatkuva X:n erakkopisteessä.

2. Miten määritellään Lipschitz kuvaus $f : X \to Y$? Jos $A \subset X$ on avoin, niin onko fA avoin avaruudessa Y, jos f on Lipschitz?

3. Määritä joukon $(0, 1]$ sulkeuma joukossa $[0, 1]$, kun (a) $\mathbf{R}$:ssä on euklidinen metriikka ja kun (b) $\mathbf{R}$:ssä on $\{0, 1\}$–metriikka.

4. Osoita, että jatkuvan kuvauksen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ graafi

$$\{(x, f(x)) \in \mathbf{R}^2 : x \in \mathbf{R}\}$$

on suljettu $\mathbf{R}^2$:ssa.