Topologi I
Slutförhör
12.5. 2009

1. Låt (X, d) vara ett metriskt rum. Definiera begreppen *öppen* mängd och *sluten* mängd. Ge exempel på mängder A och B i lämpliga metriska rum så att

(a) A är både öppen och sluten i X,
(b) B är varken öppen eller sluten i X.

2. Låt $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \geq 0\}$. Bestäm mängden $int(A)$ av innerpunkter till A, randen ∂A och den slutna höljet $\overline{A}$, då planet $\mathbb{R}^2$ är försett med den vanliga euklidiska metriken. Motivera kort (motiveringen kan även basera sig på lämpliga förklarande bilder).

3. (a) Definiera vad som avses med en *homeomorfism* $f : X \to Y$, då X och Y är metriska rum.
(b) Låt mängden

$$A = \{(x, e^x) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

utgöra grafen till exponentfunktionen $x \mapsto e^x$ och $\psi(x) = (x, e^x)$ då $x \in \mathbb{R}$. Visa att avbildningen ψ är en homeomorfism $\mathbb{R} \to A$. Mängderna $\mathbb{R}$ och $\mathbb{R}^2$ är försedda med den vanliga metriken.

4. Låt $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ samt $f : A \to \mathbb{R}$ vara en sådan kontinuerlig avbildning att $f(x) \neq 0$ för varje $x \in A$. Visa att det finns en konstant $c > 0$ så att $|f(x)| \geq c$ för varje $x \in A$. *Tips:* kompakthet hjälper.

5. Definiera begreppet *sammanhängande* metriskt rum. Undersök om följande mängder är sammanhängande:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 2|x|\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2|x|\}.$$

Planet $\mathbb{R}^2$ är försett med den vanliga euklidiska metriken. Motivera ditt svar!