Topologi I
2. kursprovet
28.4. 2009

1. Bestäm mängden $int(A)$ av innerpunkter och randen ∂A då

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y > 0\}.$$

Motivera ditt svar! I planet $\mathbb{R}^2$ används det euklidiska avståndet.

2. Låt $|\cdot|_2$ vara den euklidiska normen i planet $\mathbb{R}^2$ och

$$B(\overline{0}, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

motsvarande öppna kula. Definiera avbildningarna $f : B(\overline{0}, 1) \to \mathbb{R}^2$ och $g : \mathbb{R}^2 \to B(\overline{0}, 1)$ genom villkoren

$$f(u) = \frac{u}{1 - |u|_2}, \quad g(v) = \frac{v}{1 + |v|_2},$$

då $u \in B(\overline{0}, 1)$ och $v \in \mathbb{R}^2$. Visa att f är en homeomorfism $B(\overline{0}, 1) \to \mathbb{R}^2$. *Tips:* det lönar sig att först verifiera att $g = f^{-1}$ genom att beräkna $f \circ g$ och $g \circ f$.

3. (*teoriuppgift*) (a) Definiera ett *kompakt* metriskt rum X.
(b) Visa: om X är ett kompakt metriskt rum, Y är ett metriskt rum samt $f : X \to Y$ är en kontinuerlig avbildning, så är bildmängden fX kompakt.

4. Låt

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2\}.$$

Undersök om mängden A är (a) kompakt, (b) fullständig. I rummet $\mathbb{R}^3$ används det euklidiska avståndet.