Topologi I
1. kursprovet
24.2. 2009

1. Utred om avbildningen

$$d(x, y) = |x_1^3 - y_1^3| + |x_2^3 - y_2^3|,$$

där $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, är en metrik i mängden $\mathbb{R}^2$.

2. Anta att (X, d) är ett metriskt rum, $\emptyset \neq A \subset X$ en delmängd och $r > 0$. Visa: om diametern för mängden A satisfierar $d(A) \leq r$ och $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ för någon $x \in X$, så gäller att $A \subset B(x, 2r)$. (Ovan är $B(x, s) = \{y \in X : d(y, x) < s\}$ en öppen kula med radien s.)

3. (*teori*) Låt (X, d) och (Y, d') vara metriska rum, samt $f : X \to Y$ en avbildning.
(i) Definiera kontinuiteten av avbildningen f i punkten $a \in X$.
(ii) Anta att $d'(f(x), f(y)) \leq Md(x, y)$ för varje $x, y \in X$, där $M > 0$ är en konstant. Visa att f är kontinuerlig i X.

4. Låt $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ och $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 3\}$. Visa att A och B är slutna mängder i det euklidiska rummet $\mathbb{R}^2$, och bestäm avståndet $d(A, B)$ mellan mängderna med avseende på den euklidiska metriken d.