HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Institutionen för matematik och statistik
Topologi I
1:a mellanförhöret
10.3.2005

1. Låt $a \in \mathsf{N}$ och $A = [-a, a] = \{x \in \mathsf{R} : -a \leq x \leq a\}$, samt låt d vara den vanliga metriken i R. Undersök huruvida avbildningarna
   a) $e \colon A \times A \to \mathsf{R}_+$,
   $$e(x, y) = d(-x, -y), \text{ när } x, y \in A,$$
   b) $e' \colon A \times A \to \mathsf{R}_+$,
   $$e'(x, y) = d(x, 0) + d(y, 0), \text{ när } x, y \in A,$$
   definierar en metrik i A.

2. Låt
   $$A = \overline{B}(\bar{0}, 1) \setminus \{\bar{0}\} = \{(x, y) \in \mathsf{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$$
   vara den punkterade slutna enhetsskivan i planet.
   a) Undersök med hjälp av definitionerna för öppna och slutna mängder, huruvida A är öppen eller sluten i R^2.
   b) Bestäm A:s anhopningspunkter.

3. Låt
   $$X = \{(x, y) \in \mathsf{R}^2 : 0 \leq y < 1\}$$
   och
   $$A = \{(x, y) \in X : 0 < x \leq 1\}.$$
   Bestäm A:s ytter-, inner- och randpunkter i X, samt A:s hölje i X. I denna uppgift behövs ingen exakt motivering, men någon förklaring, som t.ex. kan grunda sig på en bild, bör ges.

4. Skriv definitionen för en *isolerad punkt* i en delmängd $A \subset X$ av ett metriskt rum (X, d). Låt (X, d) och (Y, d') vara metriska rum. Visa att varje avbildning $f \colon X \to Y$ är kontinuerlig i varje isolerad punkt av X.

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Topologi I
Kursförhör 1
3.3.2006

1. Visa att koordinataxlarna i planet dvs mängden $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : xy = 0\}$ är en sluten mängd i rummet $\mathbf{R}^2$ med den vanliga (euklidiska) metriken d. Ge ett utförligt bevis där också definitionen av d kommer fram.

2. Låt (X,d) och (Y,e) vara metriska rum och låt $f : X \to Y$. Antag att följande villkor uppfylls för punkten $a \in X$: För varje omgivning V av $f(a)$ existerar en sådan omgivning U av a att $fU \subset V$. Visa att f är kontinuerlig i punkten a. (Definitionen av kontinuitet antas vara den som ges i boken för metriska rum. Här får man givetvis inte direkt hänvisa till satsen som säger att uppgiftens villkor är ekvivalent med kontinuitet, utan beviset skall stöda sig på definitioner och tidigare satser om omgivningar öppna kulor mm.)

3. Visa att $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = x$ är kontinuerlig. Låt d och e beteckna de vanliga metrikerna i $\mathbf{R}^2$ respektive $\mathbf{R}$ och skriv beviset så att också definitionerna av d och e kommer fram. (Funktionen f kallas den första projektionen i $\mathbf{R}^2$ och betecknas pr_1.)

4. Låt $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y < 0\}$ och låt
$$B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x = 0 \text{ eller } |x| = |y| = 1\}.$$

   (a) Skissera mängden $C = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Bestäm randen ∂C, de inre och yttre punkterna för C samt det slutna höljet $\overline{C}$. (Det topologiska rummet i fråga är $\mathbf{R}^2$ med den vanliga topologin.) Här krävs *inte* motiverirngar, utan rätt svar räcker!

   (b) Visa att varje punkt på y-axeln (varje punkt $(0,y)$ där $y \in \mathbf{R}$) är en anhopningspunkt för C.