HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Todennäköisyysteoria

Loppukoe
9.8.2007

1. Osoita, että aina pätee (a) $\liminf A_n \subset \limsup A_n$ ja (b) näytä esimerkillä että inkluusio voi olla aito.

2. Osoita, että $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on Borel-mitallinen, jos (a) f on jatkuva ja (b) f on kasvava.

3. Osoita, että (a) jos $X_n \xrightarrow{L^p} X$, niin $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$, mutta että (b) käänteinen väite ei välttämättä päde.

4. (a) Muotoile ja (b) todista heikko suurten lukujen laki korreloimattomille satunnaismuuttujille.

5. (a) Muotoile Kolmogorovin määritelmä ehdolliselle odotusarvolle ja (b) todista sen avulla, että

$$\mathbf{E}[\,\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]\,|\,\mathcal{H}] = \mathbf{E}[X|\mathcal{H}]$$

aina, kun $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$.

HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos **Erilliskoe**
Todennäköisyysteoria **4.3.2008**

1. (a) Muotoile ja todista ensimmäinen Borel-Cantellin lemma.
   (b) Muotoile ja todista toinen Borel-Cantellin lemma.

2. Olkoon X ja Y satunnaismuuttujat. Määritellään

$$d(X,Y) := E\Big(\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\Big)$$

   Olkoon $(X_n : n \in \mathbb{N})$ satunnaismuuttujen jono.

   (a) Todista että jos $X_n \xrightarrow{P} Y$ (stokastisen konvergenssin mielessä), seuraa että $d(X_n, Y) \to 0$.
   (b) Todista että jos $d(X_n, Y) \to 0$, seuraa että $X_n \xrightarrow{P} Y$ (stokastisen konvergenssin mielessä).

3. Olkoon (X_n) riippumattomien ja samoinjakautuneiden satunnaismuuttujen jono, joiden arvot ovat $(0,\infty)$ joukossa. Oletetaan että $E(\log X_1) < \infty$.
   Osoita että P-melkein varmasti

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\prod_{k=1}^{n} X_k\Big)^{1/n} = \exp(\ E[\ \log(X_1)\ ]\ )$$

4. (a) Esitä Fubini lauseen todistuksen linja.

   Olkoon $X(\omega) \in [0,\infty)$ satunnais muuttuja.

   (b) Osoita että

$$E(X) = \int_0^\infty P(X > t)dt$$

   (c) Pääteekö

$$E(X) \stackrel{?}{=} \int_0^\infty P(X \geq t)dt\ ,$$

   myös silloin kun kertymäfunktio $F(t) = P(X \leq t)$ ei ole jatkuva ?

5. Olkoon $(X_1, \ldots, X_n)$ riippumattomia ja samoinjakautuneita satunnaismuuttujia. Oletetaan että $X_1 \in L^1(P)$, ja olkoon

$$S_n = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$$

   (a) Osoita Kolmogorovin ehdollisen odotusarvon määritelmän kautta että symmetria

$$E(X_k|\sigma(S_n)) = E(X_1|\sigma(S_n)) \qquad k = 1, \ldots, n$$

   pätee.
   (b) Symmetrian avulla, laske $E(X_1|\sigma(S_n))$.

HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Todennäköisyysteoria

Loppukoe
[redacted]
20.5.2008

1. Olkoon A_1, A_2 perusjoukon Ω ositus. Olkoon $B_n = A_1$, kun $n \in \mathbb{N}$ on parillinen ja $B_n = A_2$, kun $n \in \mathbb{N}$ on pariton.

   (a) Mitä ovat joukot $\liminf B_n$ ja $\limsup B_n$?

   (b) Mitä ovat todennäköisyydet $\mathbf{P}[\liminf B_n]$ ja $\mathbf{P}[\limsup B_n]$?

2. Olkoot $X_1, X_2, \ldots$ riippumattomia eksponenttijakautuneita satunnaismuuttujia parametrilla $\mu > 0$. Toisin sanoen $\mathbf{P}(X_n \leq x) = 1 - e^{-\mu x}, \forall x \geq 0$. Merkitään $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

   (a) Olkoon $M > 0$ kiinteä. Osoita, että

   $$\mathbf{P}(Y_n \leq M \text{ äärettömän monella indeksillä } n) = 0.$$

   (b) Osoita, että $Y_n \to \infty$ m.v.

3. Olkoon $p \geq 1$ ja $(X_n) \subset L^p$.

   (a) Osoita, että jonon (X_n) L^p-suppenemisesta seuraa sen heikko suppeneminen.

   (b) Osoita, että jonon (X_n) heikosta suppenemisesta ei seuraa sen L^p-suppeneminen.

4. Olkoot $(X_n) \subset L^2$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttuja. (a) Muotoile ja (b) todista niihin liittyvä heikko suurten lukujen laki.

5. (a) Muotoile Kolmogorovin määritelmä ehdolliselle odotusarvolle ja (b) todista sen avulla, että

   $$\mathbf{E}[\,\mathbf{E}[X|\mathcal{H}]\,|\,\mathcal{G}] \;=\; \mathbf{E}[X|\mathcal{H}]$$

   aina, kun $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ (eli "karkeampi aina voittaa").

HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos **Loppukoe** /12.6.2008
Todennäköisyysteoria

1. Olkoon A_1, A_2 perusjoukon Ω ositus. Olkoon $B_n = A_1$, kun $n \in \mathbb{N}$ on parillinen ja $B_n = A_2$, kun $n \in \mathbb{N}$ on pariton.
   (a) Mitä ovat joukot $\liminf B_n$ ja $\limsup B_n$?
   (b) Mitä ovat todennäköisyydet $\mathbf{P}[\liminf B_n]$ ja $\mathbf{P}[\limsup B_n]$?

2. Olkoot $X_1, X_2, \ldots$ riippumattomia eksponenttijakautuneita satunnaismuuttujia parametrilla $\mu > 0$. Toisin sanoen $\mathbf{P}(X_n \leq x) = 1 - e^{-\mu x}, \forall x \geq 0$. Merkitään $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.
   (a) Olkoon $M > 0$ kiinteä. Osoita, että
   $$\mathbf{P}(Y_n \leq M \text{ äärettömän monella indeksillä } n) = 0.$$
   (b) Osoita, että $Y_n \to \infty$ m.v.

3. Olkoon $p \geq 1$ ja $(X_n) \subset L^p$.
   (a) Osoita, että jonon (X_n) L^p-suppenemisesta seuraa sen heikko suppeneminen.
   (b) Osoita, että jonon (X_n) heikosta suppenemisesta ei seuraa sen L^p-suppeneminen.

4. Olkoot $(X_n) \subset L^2$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttuja. (a) Muotoile ja (b) todista niihin liittyvä heikko suurten lukujen laki.

5. (a) Muotoile Kolmogorovin määritelmä ehdolliselle odotusarvolle ja (b) todista sen avulla, että
   $$\mathbf{E}[\,\mathbf{E}[X|\mathcal{H}]\,|\,\mathcal{G}] = \mathbf{E}[X|\mathcal{H}]$$
   aina, kun $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ (eli "karkeampi aina voittaa").

HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Todennäköisyysteoria

Loppukoe

14.8.2008

1. Osoita, että aina pätee (a) $\liminf A_n \subset \limsup A_n$ ja (b) näytä esimerkillä että inkluusio voi olla aito.

2. Osoita, että $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on Borel-mitallinen, jos (a) f on jatkuva ja (b) f on kasvava.

3. Osoita, että (a) jos $X_n \xrightarrow{L^p} X$, niin $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$, mutta että (b) käänteinen väite ei välttämättä päde.

4. (a) Muotoile ja (b) todista heikko suurten lukujen laki korreloimattomille satunnaismuuttujille.

5. (a) Muotoile Kolmogorovin määritelmä ehdolliselle odotusarvolle ja (b) todista sen avulla, että

$$\mathbf{E}[\,\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]\,|\,\mathcal{H}] = \mathbf{E}[X|\mathcal{H}]$$

aina, kun $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$.

Todennäköisyysteoria
Tentti 12.11.2008

1. Mikä relaatioista $=$, $\subset$, $\supset$ pätee seuraavien tapahtumaparien välillä:
a) $\limsup(A_n \cup B_n)$, $(\limsup A_n) \cup (\limsup B_n)$,
b) $\limsup(A_n \cap B_n)$, $(\limsup A_n) \cap (\limsup B_n)$?

2. Oletetaan että EX on äärellinen. Osoita:

$$\lim_{n\to\infty} E(X; |X| > n) = 0.$$

3. Oletetaan, että Y on Exp(1)-jakautunut, so. sen kertymäfunktio on

$$P(Y \leq y) = 1 - e^{-y},\ y \geq 0.$$

Lisäksi oletetaan, että

$$E(X|Y) = Y - 2.$$

Laske

$$E(X|n \leq Y < n+1).$$

4. Oletetaan, että $X_1, X_2, ...$ ovat riippumattomia ja tasajakautuneita välillä $[0,1]$. Olkoon

$$Y_n \doteq n\ \min(X_1, ..., X_n).$$

Suppeneeko satunnaismuuttujajono Y_n jakaumaltaan? Jos suppenee, niin mitä kohti?

Todennäköisyysteoria/Nummelin
Loppukoe 3.3.2009

1. Mikä relaatioista $=$, $\subset$, $\supset$ pätee seuraavien tapahtumaparien välillä:
a) $\{\sup X_n < x\}$, $\bigcap_n \{X_n < x\}$
b) $\{\liminf X_n \geq x\}$, $\liminf\{X_n \geq x\}$.

2. Oletetaan, että $X_1, X_2, \ldots$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita. Osoita, että jos $E|X|$ on äärellinen, niin $|X_n| \leq n$ j.l.m.v..

3. Oletetaan, että $X_1, X_2, \ldots$ ovat riippumattomia ja Eksp(λ)-jakautuneita. Olkoon

$$Y_n \doteq \min\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

Osoita, että

$$Y_n \to 0 \text{ (stok)}.$$

4. Olkoot $X, Y, Z \in L^2$ mielivaltaisia. Oletetaan, että $EY = EZ = 0$. Hae satunnaismuuttujan X paras lineaarinen ennuste ehdolla Y ja Z, so. muotoa

$$aY + bZ \ + c \quad (a, b, c \in R)$$

oleva paras ennuste.

5. Oletetaan, että satunnaismuuttuja X_n on $\mathrm{N}(0, \sigma_n^2)$-jakautunut. Osoita, että $X_n \to 0$ (jak.), jos ja vain jos $\sigma_n^2 \to 0$.

Todennäköisyysteoria, koe , 19.05.09

HUOM.: KOE ON JAETTU KAHTEEN OSAAN. JOS OLET SUORITTANUT ENSIMMÄISEN VÄLIKOKEEN TÄÄLLÄ LUKUKAUDELLA, SINUN JÄÄ RATKAISEVAKSI TOISEN OSAN TEHTÄVÄT 4-5, EIKÄ SIINÄ TAPAUKSESSA TARVITSE RATKAISTAA ENSIMMÄISEN OSAN TEHTÄVÄT 1-3.

KOKEEN KESTO ON 4 TUNTIA KAIKILLE. EI SAA KÄYTTÄÄ LUENTOMATERIAALIA EIKÄ KIRJALLISUUTTA. MATEMAATTISIA TAULUKKOJA JA TASKULASKINTA SAA KÄYTTÄÄ MUTTA NIISTÄ EI OLE HYÖTYÄ.

1 OSA I

Tehtävä 1 Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon satunnaismuuttuja $X(\omega) \geq 0$ P-melkein varmasti. Osoita että

$$E_P(X) = \int_0^\infty P(X > t)dt$$

Vihje: Fubinin lauseella, perustelemalla että Fubinin lauseen oletukset ovat voimassa.

Tehtävä 2 Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n, \dots$ riippumattomien ja samoin jakautuneiden satunnaismuuttujen jono, jossa X_i ovat λ-exponentiaalisia parametrilla $\lambda > 0$, siis

$$P(X_1 \leq t) = \mathbf{1}(t > 0)\Big\{1 - \exp(-\lambda t)\Big\} .$$

2.i) Osoita että

$$D_n(\omega) := \min\{X_k(\omega) : 1 \leq k \leq n\}$$

on satunnaismuuttuja, ja sen jakauma on myös exponentiaalinen.

2.ii) Osoita että

$$U_n(\omega) := \max\{X_k(\omega) : 1 \leq k \leq n\}$$

on satunnaismuuttuja, ja laske sen jakauman tiheysfunktio.

Vihje: laske ensi sen kertymäfunktio.

2.iii) Laske odotusarvo

$$E_P(U_n) := E_P\Big(\max_{1\leq k\leq n}\{X_k(\omega)\}\Big)$$

Vihje: Tehtävän 1. tuloksen avulla !.

Tehtävä 3 Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega), \dots$ riippumattomien satunnaismuuttujen jono, (jotka **eivät** ole samoin jakautuneita), jolla

$$P\Big(X_n = n^2 - 1\Big) = \Big\{1 - P\Big(X_n = -1\Big)\Big\} = n^{-2}\ .$$

Olkoon $S_n := (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$.

3.i) Osoita että P-melkein kaikille ω:lle

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = -1\ ,$$

mutta kaikille n:lle

$$E_P\Big(\frac{S_n}{n}\Big) = 0.$$

Vihje: laske ensi

$$P\Big(\omega : X_n(\omega) \neq -1 \text{ äärettömästi monille } n\text{:lle }\Big)$$

3.ii) Selitä miksi tässä tapauksessa Fatoun lemma soveltuu jonolle $\{n^{-1}S_n(\omega)\}$, mutta käänteis-Fatoun lemman oletukset eivät astu voimaan.

2 Osa II

Tehtävä 4 Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon $(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega), \ldots)$ riippumattomia satunnaismuuttujia, joilla on jakaumat Poisson(λ_i), $i = 1, \ldots, n$. parametriarvoilla $\lambda_i > 0$. Siis

$$P(X_i = k) = \exp(-\lambda_i)\frac{\lambda_i^k}{k!}$$

4.i) Laske Poissonin jakauman karakteristinen funktio:

$$\varphi(\theta) = E_P(\exp(i\theta X_1))$$

4.ii) Osoita että konvoluution

$$S_n(\omega) = (X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots + X_n(\omega))$$

jakauma on Poisson$(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$.

4.iii) Laske satunnaismuuttujan S_n:n odotusarvo ja varianssi.

Vihje: yksi mahdollinen laskentatapa on derivoimalla karakteristisen funktion pisteessä $\theta = 0$.

4.iv) Oleta nyt että $\lambda_i = 1$ for all $i \in \mathbb{N}$, ja osoita että, kun $n \to \infty$,

$$\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$$

(eli osoita konvergenssi jakauman mielessä kohti standardi-gaussista jakaumaa).

Tehtävä 5 Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon satunnaismuuttujapari $X(\omega), Y(\omega) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, jolla oletuksena on seuraava **lineaarisen regression ominaisuus** ehdolliselleodotusarvolle:

$$E_P(X|\sigma(Y))(\omega) = aY(\omega) + b$$

jossa $a, b \in \mathbb{R}$ ovat deterministisia vakioita.,

5.i) Laske a ja b:n arvot X ja Y momenttien ja yhteismomenttien kautta, ehdollisen odotusarvon ominaisuuksin avulla.

5.ii) Oleta nyt että $X_1(\omega), X_2(\omega) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ovat riippumattomia ja samoinjakautuneita satunnaismuuttujia.

Olkoon

$$Y(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega)$$

Osoita että lineaarisen regression ominaisuus pätee ehdolliselle odotusarvolle $E_P(X_1|\sigma(Y))(\omega)$, ja esitä vastaavat a, b arvot.

Vihje: huomataan että symmetria $E_P(X_1|\sigma(Y))(\omega) = E_P(X_2|\sigma(Y))(\omega)$. on voimassa koska satunnaismuuttujen parille (X_1, Y) ja (X_2, Y) on sama todennäköisyysjakauma.

5.iii) Oleta nyt että $X_1(\omega)$ ja $X_2(\omega)$ ovat riippumattomia ja samoinjakautuneita gaussisia satunnaismuuttujia, odotusarvolla 0 ja varianssilla 1, olkoon $Y(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega)$.

Bayesin kaavan avulla laske ehdollinen tiheysfunktio säännölliselle ehdolliselle jakaumalle

$$P(X \in dx|\sigma(Y))(\omega)$$

Vihje: muistetaan standardi-gaussisella satunnaismuuttujalla $X(\omega)$ odotusarvolla 0 ja varianssilla 1 on jakauma

$$P(X \in dt) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{t^2}{2}\Big) dt$$

Todennäköisyysteoriam koe , 11.06.09

HUOM.: KOE ON JAETTU KAHTEEN OSAAN. JOS OLET SUORITTANUT ENSIMMÄISEN VÄLIKOKEEN TÄÄLLÄ LUKUKAUDELLA, SINUN JÄÄ RATKAISEVAKSI TOISEN OSAN TEHTÄVÄT 4-5, EIKÄ SIINÄ TAPAUKSESSA TARVITSE RATKAISTAA ENSIMMÄISEN OSAN TEHTÄVÄT 1-3.

KOKEEN KESTO ON 4 TUNTIA KAIKILLE. EI SAA KÄYTTÄÄ LUENTOMATERIAALIA EIKÄ KIRJALLISUUTTA. MATEMAATTISIA TAULUKKOJA JA TASKULASKINTA SAA KÄYTTÄÄ MUTTA NIISTÄ EI OLE HYÖTYÄ.

1 OSA I

Tehtävä I.1 Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$ tapahtumien jono, Muotoile ja todista ensimmäinen ja toinen Borel Cantelli lemmat, jotka antavat riittävät ehdot lausekkeile

a) $P(\limsup_n A_n) = 0$

b) $P(\limsup_n A_n) = 1$

Tehtävä I.2 Olkoon $X(\omega)$ satunnaismuuttuja jolla on **jatkuva** kertymäfunktio $F_X(t) = P(X \leq t)$.

a) Osoita että satunnaismuuttuja $U(\omega) := F_X(X(\omega))$ on tasaisesti jakautunut välissä $[0, 1]$.

b) Mitä tapahtuu jos kertymäfunktiolla on epäjatkuvuus piste x jossa $F_X(x) \neq F_X(x-) = \lim_{y \uparrow x} F_X(x)$?

Tehtävä I.3 Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, osoita että satunnaismuuttuja X on integroituva P:n suhteen jos ja vain jos

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(|X| > n) < \infty$$

2 Osa II

Tehtävä II.1 Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon $(X_n : n \in \mathbb{N})$ ja X satunnaismuuttujat.

a) Osoita että
$X_n \xrightarrow{P} X$ (stokastisesti) jos ja vain jos $d(X_n, X) \to 0$, kun $n \to \infty$, jossa

$$d(X,Y) = E_P\left(\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\right)$$

Vihje: määritelmän ja Markovin epäyhtälön avulla.

b) Osoita että jos $X_n(\omega) \to 0$ P-melkein varmasti, seuraa että $X_n(\omega) \xrightarrow{P} 0$ (stokastisesti).

c) Osoita että $X_n(\omega) \xrightarrow{P} 0$ stokastisesti, jos ja vain jos on olemassa deterministinen alijono $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ jolla $X_{n_k}(\omega) \to 0$ P-melkein varmasti.

Vihje: Borel Cantelli lemman avulla.

Tehtävä II.2

Olkoon jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ $(X_n(\omega), Y_n(\omega))$ satunnaismuuttujat todennäköisyysavaruudessa $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$.

Olkoon $X(\omega), Y(\omega)$ satunnaismuuttujat todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Oletamme että jokaiselle n:lle X_n ja Y_n ovat parittain riippumattomia P_n mitan suhteen , ja myös X ja Y ovat parittain riippumattomia P mitan suhteen, ja sen lisääksi

$X_n \xrightarrow{d} X$ ja $Y_n \xrightarrow{d} Y$ (jakauman mielessä).

Osoita että $(X_n + Y_n) \xrightarrow{d} (X+Y)$ (jakauman mielessä).

Vihje: esimerkiksi karakterisen funktion avulla.

Tehtävä II.3 a) Muotoile Kolmogorovin määritelmä ehdolliselle odotusarvolle

b) todista sen avulla, että

$$E\Big[\,E[X|\mathcal{G}]\,\Big|\,\mathcal{H}\Big] = E\Big[X\Big|\mathcal{H}\Big]$$

aina, kun $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$.