Todennäköisyyslaskennan tentti 9.8.07
Luennoitsija: Jukka Corander

Kaikissa tehtävissä on esitettävä kunnolliset perustelut ratkaisulle. Kukin tehtävä on 6 pisteen arvoinen.

T1. Olkoon A ja B riippumattomia satunnaistapahtumia. Osoita että tästä seuraa satunnaistapahtumien A^c ja B^c riippumattomuus (A^c ja B^c ovat näiden tapahtumien komplementtitapahtuma).

T2. Ystävälläsi on tietyn kokeen perusteella diagnosoitu Suomessa erittäin harvinainen sairaus, jota esiintyy vain yhdellä miljoonasta suomalaisesta. Koe perustuu kansainvälisen lääkeyrityksen tuottamaan laboratoriotestiin, jonka tarkkuus on määritelty koeolosuhteissa seuraavasti: 1% terveistä saa testissä indikaation sairaudesta (ns false positive rate) ja 1%:lle sairaista testi ei indikoi sairautta (ns false negative rate). Mikä on ehdollinen todennäköisyys sille että ystävälläsi on todella ko. sairaus, annettuna edellä oleva informaatio? Vihje: käytä Bayesin lausetta.

T3. Oletetaan että jatkuva satunnaismuuttuja X noudattaa jakaumaa $N(0, 1)$, eli normaalijakaumaa jonka odotusarvo on 0 ja varianssi on 1. Määritellään satunnaismuuttujan Y jakauma seuraavasti: $Y = aX + b$, missä a ja b ovat reaalilukuja, joille pätee $a > 0, -\infty < b < \infty$. Johda Y:n jakauman tiheysfunktio.

T4. Esitä Venn-diagrammin avulla kaksi satunnaistapahtumaa A ja B, jotka ovat ehdollisesti riippumattomia annettuna kolmas satunnaistapahtuma C. Huomaa että Venn-diagrammissa tapahtumien pinta-alat ovat suhteessa niiden todennäköisyyksiin.

T5. Satunnaismuuttujilla X ja Y on yhteistodennäköisyysjakauma, jonka määrittelee tiheysfunktio

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{5x^2}{2}, -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2 \\ 0, \text{ muutoin} \end{cases} .$$

Määritä Y:n ehdollinen tiheysfunktio $f(y|X = x)$ ja laske ehdollinen odotusarvo $E(Y|X = x)$.

Todennäköisyyslaskennan kurssi — erilliskoe 24. 1. 2008

Kokeessa ei saa käyttää taulukkokirjaa!

1. Pelurin taskussa on kaksi kolikkoa: yksi tavallinen, jossa toisella puolella on kruunu ja toisella klaava, ja yksi erikoiskolikko, jossa molemmilla puolilla on kruunu. Peluri valitsee kolikon umpimähkään ja heittää sen, jolloin tuloksena on kruunu. Millä todennäköisyydellä tässä kolikossa myös toisella puolella on kruunu? Käytä Bayesin kaavaa.

2. a) Miten määritellään Poisson-jakauma $P(\mu)$? Mitkä ovat sen odotusarvo ja varianssi? (Perusteluja ei vaadita.)

   b) Tehdas valmistaa keksejä, joissa on suklaarakeita. Rakeiden lukumäärä kussakin keksissä on Poisson-jakautunut, ja halutaan, että rakeita olisi ainakin yksi todennäköisyydellä ≥ 0.99. Miten parametri μ on valittava? Millä todennäköisyydellä rakeita on ainakin kaksi?

   [*Huom.* Casellan ja Bergerin kirjassa Poisson-jakaumaa merkitään $\mathit{Poisson}(\mu)$.]

3. a) Miten määritellään satunnaismuuttujaparin (X, Y) yhteiskertymäfunktio? Miten siitä saadaan parin (X, Y) yhteistiheysfunktio siinä tapauksessa että (X, Y) on jatkuvasti jakautunut?

   b) Osoita, ettei funktio $F \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{kun } y \geq -x, \\ 0 & \text{kun } y < -x, \end{cases}$$

   ole minkään satunnaismuuttujaparin yhteiskertymäfunktio.

4. Olkoot $X_1, X_2, \ldots$ riippumattomia samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, joilla on odotusarvo μ ja äärellinen varianssi σ^2. Keskeisen raja-arvolauseen perusteella muuttujien $X_1, \ldots, X_n$ summat (tai keskiarvot) sopivasti normitettuina suppenevat jakaumaltaan kohti standardinormaalisti jakautunutta muuttujaa, kun $n \to \infty$. Lausu tämä tulos tarkasti. Arvioi sen avulla todennäköisyyttä $P\{\sum_{i=1}^{24} X_i > 10\}$, kun $X_1, \ldots, X_{24}$ ovat riippumattomia ja noudattavat välin $(0, 1)$ tasajakaumaa.

   Kääntöpuolella on standardinormaalijakauman kertymäfunktion taulukko.

5. Oletetaan, että satunnaismuuttujat U ja V ovat riippumattomia ja noudattavat kumpikin jakaumaa välin $(0, 1)$ tasajakaumaa. Ilmoita parin (U, V) yhteistiheysfunktio. Määritellään sitten $X = U$ ja $Y = UV$. Johda parin (X, Y) yhteistiheysfunktio. Ilmoita selvästi, missä joukossa se on $= 0$ ja missä ei.

Table of the Standard Normal Distribution Function

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.5000	0.60	0.7257	1.20	0.8849	1.80	0.9641	2.40	0.9918
0.01	0.5040	0.61	0.7291	1.21	0.8869	1.81	0.9649	2.41	0.9920
0.02	0.5080	0.62	0.7324	1.22	0.8888	1.82	0.9656	2.42	0.9922
0.03	0.5120	0.63	0.7357	1.23	0.8907	1.83	0.9664	2.43	0.9925
0.04	0.5160	0.64	0.7389	1.24	0.8925	1.84	0.9671	2.44	0.9927
0.05	0.5199	0.65	0.7422	1.25	0.8944	1.85	0.9678	2.45	0.9929
0.06	0.5239	0.66	0.7454	1.26	0.8962	1.86	0.9686	2.46	0.9931
0.07	0.5279	0.67	0.7486	1.27	0.8980	1.87	0.9693	2.47	0.9932
0.08	0.5319	0.68	0.7517	1.28	0.8997	1.88	0.9699	2.48	0.9934
0.09	0.5359	0.69	0.7549	1.29	0.9015	1.89	0.9706	2.49	0.9936
0.10	0.5398	0.70	0.7580	1.30	0.9032	1.90	0.9713	2.50	0.9938
0.11	0.5438	0.71	0.7611	1.31	0.9049	1.91	0.9719	2.52	0.9941
0.12	0.5478	0.72	0.7642	1.32	0.9066	1.92	0.9726	2.54	0.9945
0.13	0.5517	0.73	0.7673	1.33	0.9082	1.93	0.9732	2.56	0.9948
0.14	0.5557	0.74	0.7704	1.34	0.9099	1.94	0.9738	2.58	0.9951
0.15	0.5596	0.75	0.7734	1.35	0.9115	1.95	0.9744	2.60	0.9953
0.16	0.5636	0.76	0.7764	1.36	0.9131	1.96	0.9750	2.62	0.9956
0.17	0.5675	0.77	0.7794	1.37	0.9147	1.97	0.9756	2.64	0.9959
0.18	0.5714	0.78	0.7823	1.38	0.9162	1.98	0.9761	2.66	0.9961
0.19	0.5753	0.79	0.7852	1.39	0.9177	1.99	0.9767	2.68	0.9963
0.20	0.5793	0.80	0.7881	1.40	0.9192	2.00	0.9773	2.70	0.9965
0.21	0.5832	0.81	0.7910	1.41	0.9207	2.01	0.9778	2.72	0.9967
0.22	0.5871	0.82	0.7939	1.42	0.9222	2.02	0.9783	2.74	0.9969
0.23	0.5910	0.83	0.7967	1.43	0.9236	2.03	0.9788	2.76	0.9971
0.24	0.5948	0.84	0.7995	1.44	0.9251	2.04	0.9793	2.78	0.9973
0.25	0.5987	0.85	0.8023	1.45	0.9265	2.05	0.9798	2.80	0.9974
0.26	0.6026	0.86	0.8051	1.46	0.9279	2.06	0.9803	2.82	0.9976
0.27	0.6064	0.87	0.8079	1.47	0.9292	2.07	0.9808	2.84	0.9977
0.28	0.6103	0.88	0.8106	1.48	0.9306	2.08	0.9812	2.86	0.9979
0.29	0.6141	0.89	0.8133	1.49	0.9319	2.09	0.9817	2.88	0.9980
0.30	0.6179	0.90	0.8159	1.50	0.9332	2.10	0.9821	2.90	0.9981
0.31	0.6217	0.91	0.8186	1.51	0.9345	2.11	0.9826	2.92	0.9983
0.32	0.6255	0.92	0.8212	1.52	0.9357	2.12	0.9830	2.94	0.9984
0.33	0.6293	0.93	0.8238	1.53	0.9370	2.13	0.9834	2.96	0.9985
0.34	0.6331	0.94	0.8264	1.54	0.9382	2.14	0.9838	2.98	0.9986
0.35	0.6368	0.95	0.8289	1.55	0.9394	2.15	0.9842	3.00	0.9987
0.36	0.6406	0.96	0.8315	1.56	0.9406	2.16	0.9846	3.05	0.9989
0.37	0.6443	0.97	0.8340	1.57	0.9418	2.17	0.9850	3.10	0.9990
0.38	0.6480	0.98	0.8365	1.58	0.9429	2.18	0.9854	3.15	0.9992
0.39	0.6517	0.99	0.8389	1.59	0.9441	2.19	0.9857	3.20	0.9993
0.40	0.6554	1.00	0.8413	1.60	0.9452	2.20	0.9861	3.25	0.9994
0.41	0.6591	1.01	0.8437	1.61	0.9463	2.21	0.9864	3.30	0.9995
0.42	0.6628	1.02	0.8461	1.62	0.9474	2.22	0.9868	3.35	0.9996
0.43	0.6664	1.03	0.8485	1.63	0.9485	2.23	0.9871	3.40	0.9997
0.44	0.6700	1.04	0.8508	1.64	0.9495	2.24	0.9875	3.45	0.9997
0.45	0.6736	1.05	0.8531	1.65	0.9505	2.25	0.9878	3.50	0.9998
0.46	0.6772	1.06	0.8554	1.66	0.9515	2.26	0.9881	3.55	0.9998
0.47	0.6808	1.07	0.8577	1.67	0.9525	2.27	0.9884	3.60	0.9998
0.48	0.6844	1.08	0.8599	1.68	0.9535	2.28	0.9887	3.65	0.9999
0.49	0.6879	1.09	0.8621	1.69	0.9545	2.29	0.9890	3.70	0.9999
0.50	0.6915	1.10	0.8643	1.70	0.9554	2.30	0.9893	3.75	0.9999
0.51	0.6950	1.11	0.8665	1.71	0.9564	2.31	0.9896	3.80	0.9999
0.52	0.6985	1.12	0.8686	1.72	0.9573	2.32	0.9898	3.85	0.9999
0.53	0.7019	1.13	0.8708	1.73	0.9582	2.33	0.9901	3.90	1.0000
0.54	0.7054	1.14	0.8729	1.74	0.9591	2.34	0.9904	3.95	1.0000
0.55	0.7088	1.15	0.8749	1.75	0.9599	2.35	0.9906	4.00	1.0000
0.56	0.7123	1.16	0.8770	1.76	0.9608	2.36	0.9909		
0.57	0.7157	1.17	0.8790	1.77	0.9616	2.37	0.9911		
0.58	0.7190	1.18	0.8810	1.78	0.9625	2.38	0.9913		
0.59	0.7224	1.19	0.8830	1.79	0.9633	2.39	0.9916		

Todennäköisyyslaskennan kurssi — erilliskoe 3. 4. 2008

Kokeessa ei saa käyttää taulukkokirjaa!

1. Monivalintakokeen kysymyksessä on neljä vastausvaihtoehtoa. Kokelas tietää oikean vastauksen todennäköisyydellä 0.8. Jos hän ei tiedä vastausta, hän vastaa umpimähkään eli arvaa oikein todennäköisyydellä 1/4. Laske todennäköisyys sille, että kokelas on *tiennyt* oikean vastauksen, jos hänen vastauksensa on oikein. Käytä Bayesin kaavaa.

2. a) Miten määritellään binomijakauma $Bin(n, \theta)$? Mitkä ovat sen odotusarvo ja varianssi? (Perusteluja ei vaadita.)
   b) Selosta jokin konkreettinen satunnaisilmiö tai -koe ja siihen liittyvä satunnaismuuttuja, jonka voidaan ajatella noudattavan jakaumaa $Bin(10, \frac{1}{2})$.
   [*Huom.* Casellan ja Bergerin kirjassa binomijakaumaa merkitään binomial(n, θ).]

3. Henkilö kulkee työmatkansa aamuin illoin metrolla, jonka vuoroväli on 5 minuuttia. Mennessään metroasemalle hän ei seuraa tarkasti kelloa, joten voidaan olettaa, että hänen odotusaikansa sekä aamulla että illalla on tasaisesti jakautunut. Lisäksi ajat ovat riippumattomat. Miten on jakautunut aika, jonka hän päivässä yhteensä käyttää metron odottamiseen? Kuinka pitkä on keskimääräinen odotusaika, ja mikä on sen keskihajonta?

4. Oletetaan, että U ja V ovat riippumattomia satunnaismuuttujia, jotka noudattavat kumpikin standardinormaalijakaumaa $N(0, 1)$. Määritellään $X = U + V + 1$ ja $Y = U - 2V$. Selvitä parin (X, Y) yhteisjakauma. Laske myös X:n ja Y:n välinen korrelaatiokerroin $\mathrm{cor}(X, Y)$.

5. a) Olkoon (Y_n) jono satunnaismuuttujia. Miten määritellään se, että jono (Y_n) suppenee stokastisesti kohti satunnaismuuttujaa Y, ts. $Y_n \xrightarrow{P} Y$?
   b) Olkoot $X_1, X_2, \ldots$ riippumattomia samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, joilla on odotusarvo μ ja äärellinen varianssi σ^2. Olkoon $\overline{X}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$. Todista heikko suurten lukujen laki, jonka mukaan $\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu$.

Todennäköisyyslaskennan kurssi — erilliskoe 12. 6. 2008

Kokeessa ei saa käyttää taulukkokirjaa!

1. Pelurin taskussa on kaksi kolikkoa: yksi tavallinen, jossa toisella puolella on kruunu ja toisella klaava, ja yksi erikoiskolikko, jossa molemmilla puolilla on kruunu. Peluri valitsee kolikon umpimähkään ja heittää sen, jolloin tuloksena on kruunu. Millä todennäköisyydellä tässä kolikossa myös toisella puolella on kruunu? Käytä Bayesin kaavaa.

2. a) Miten määritellään eksponenttijakauma, ja mitkä ovat sen odotusarvo ja varianssi?
   b) Avaruusaluksessa otetaan käyttöön eräs elektroninen komponentti, jolle on lisäksi yhdeksän samanlaista varaosaa. Kokemuksesta tiedetään, että yhden komponentin kestoaika on keskimäärin 2 kuukautta. Voidaan olettaa, että kestoajat ovat toisistaan riippumattomat ja noudattavat eksponenttijakaumaa. Laske komponenttien yhteenlasketun kestoajan odotusarvo ja keskihajonta.

3. Noudattakoon satunnaismuuttuja X välin $(0,1)$ tasajakaumaa. Olkoon $Y = \sqrt{X}$. Johda satunnaismuuttujan Y kertymäfunktio ja tiheysfunktio. Selvitä myös, ovatko X ja Y riippumattomat.

4. Olkoot $X_1, X_2, \ldots$ riippumattomia samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, joilla on odotusarvo μ ja äärellinen varianssi σ^2. Keskeisen raja-arvolauseen perusteella muuttujien $X_1, \ldots, X_n$ summat (tai keskiarvot) sopivasti normitettuina suppenevat jakaumaltaan kohti standardinormaalisti jakautunutta muuttujaa, kun $n \to \infty$. Lausu tämä tulos tarkasti. Arvioi sen avulla todennäköisyyttä $P\{\sum_{i=1}^{24} X_i > 10\}$, kun $X_1, \ldots, X_{24}$ ovat riippumattomia ja noudattavat välin $(0,1)$ tasajakaumaa.

   Kääntöpuolella on standardinormaalijakauman kertymäfunktion taulukko.

5. Oletetaan, että U ja V ovat riippumattomia satunnaismuuttujia, jotka noudattavat kumpikin standardinormaalijakaumaa $N(0,1)$. Määritellään $X = U + V + 1$ ja $Y = 2U - V$. Selvitä parin (X, Y) yhteisjakauma. Laske myös X:n ja Y:n välinen korrelaatiokerroin $\operatorname{cor}(X, Y)$.

Table of the Standard Normal Distribution Function

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.5000	0.60	0.7257	1.20	0.8849	1.80	0.9641	2.40	0.9918
0.01	0.5040	0.61	0.7291	1.21	0.8869	1.81	0.9649	2.41	0.9920
0.02	0.5080	0.62	0.7324	1.22	0.8888	1.82	0.9656	2.42	0.9922
0.03	0.5120	0.63	0.7357	1.23	0.8907	1.83	0.9664	2.43	0.9925
0.04	0.5160	0.64	0.7389	1.24	0.8925	1.84	0.9671	2.44	0.9927
0.05	0.5199	0.65	0.7422	1.25	0.8944	1.85	0.9678	2.45	0.9929
0.06	0.5239	0.66	0.7454	1.26	0.8962	1.86	0.9686	2.46	0.9931
0.07	0.5279	0.67	0.7486	1.27	0.8980	1.87	0.9693	2.47	0.9932
0.08	0.5319	0.68	0.7517	1.28	0.8997	1.88	0.9699	2.48	0.9934
0.09	0.5359	0.69	0.7549	1.29	0.9015	1.89	0.9706	2.49	0.9936
0.10	0.5398	0.70	0.7580	1.30	0.9032	1.90	0.9713	2.50	0.9938
0.11	0.5438	0.71	0.7611	1.31	0.9049	1.91	0.9719	2.52	0.9941
0.12	0.5478	0.72	0.7642	1.32	0.9066	1.92	0.9726	2.54	0.9945
0.13	0.5517	0.73	0.7673	1.33	0.9082	1.93	0.9732	2.56	0.9948
0.14	0.5557	0.74	0.7704	1.34	0.9099	1.94	0.9738	2.58	0.9951
0.15	0.5596	0.75	0.7734	1.35	0.9115	1.95	0.9744	2.60	0.9953
0.16	0.5636	0.76	0.7764	1.36	0.9131	1.96	0.9750	2.62	0.9956
0.17	0.5675	0.77	0.7794	1.37	0.9147	1.97	0.9756	2.64	0.9959
0.18	0.5714	0.78	0.7823	1.38	0.9162	1.98	0.9761	2.66	0.9961
0.19	0.5753	0.79	0.7852	1.39	0.9177	1.99	0.9767	2.68	0.9963
0.20	0.5793	0.80	0.7881	1.40	0.9192	2.00	0.9773	2.70	0.9965
0.21	0.5832	0.81	0.7910	1.41	0.9207	2.01	0.9778	2.72	0.9967
0.22	0.5871	0.82	0.7939	1.42	0.9222	2.02	0.9783	2.74	0.9969
0.23	0.5910	0.83	0.7967	1.43	0.9236	2.03	0.9788	2.76	0.9971
0.24	0.5948	0.84	0.7995	1.44	0.9251	2.04	0.9793	2.78	0.9973
0.25	0.5987	0.85	0.8023	1.45	0.9265	2.05	0.9798	2.80	0.9974
0.26	0.6026	0.86	0.8051	1.46	0.9279	2.06	0.9803	2.82	0.9976
0.27	0.6064	0.87	0.8079	1.47	0.9292	2.07	0.9808	2.84	0.9977
0.28	0.6103	0.88	0.8106	1.48	0.9306	2.08	0.9812	2.86	0.9979
0.29	0.6141	0.89	0.8133	1.49	0.9319	2.09	0.9817	2.88	0.9980
0.30	0.6179	0.90	0.8159	1.50	0.9332	2.10	0.9821	2.90	0.9981
0.31	0.6217	0.91	0.8186	1.51	0.9345	2.11	0.9826	2.92	0.9983
0.32	0.6255	0.92	0.8212	1.52	0.9357	2.12	0.9830	2.94	0.9984
0.33	0.6293	0.93	0.8238	1.53	0.9370	2.13	0.9834	2.96	0.9985
0.34	0.6331	0.94	0.8264	1.54	0.9382	2.14	0.9838	2.98	0.9986
0.35	0.6368	0.95	0.8289	1.55	0.9394	2.15	0.9842	3.00	0.9987
0.36	0.6406	0.96	0.8315	1.56	0.9406	2.16	0.9846	3.05	0.9989
0.37	0.6443	0.97	0.8340	1.57	0.9418	2.17	0.9850	3.10	0.9990
0.38	0.6480	0.98	0.8365	1.58	0.9429	2.18	0.9854	3.15	0.9992
0.39	0.6517	0.99	0.8389	1.59	0.9441	2.19	0.9857	3.20	0.9993
0.40	0.6554	1.00	0.8413	1.60	0.9452	2.20	0.9861	3.25	0.9994
0.41	0.6591	1.01	0.8437	1.61	0.9463	2.21	0.9864	3.30	0.9995
0.42	0.6628	1.02	0.8461	1.62	0.9474	2.22	0.9868	3.35	0.9996
0.43	0.6664	1.03	0.8485	1.63	0.9485	2.23	0.9871	3.40	0.9997
0.44	0.6700	1.04	0.8508	1.64	0.9495	2.24	0.9875	3.45	0.9997
0.45	0.6736	1.05	0.8531	1.65	0.9505	2.25	0.9878	3.50	0.9998
0.46	0.6772	1.06	0.8554	1.66	0.9515	2.26	0.9881	3.55	0.9998
0.47	0.6808	1.07	0.8577	1.67	0.9525	2.27	0.9884	3.60	0.9998
0.48	0.6844	1.08	0.8599	1.68	0.9535	2.28	0.9887	3.65	0.9999
0.49	0.6879	1.09	0.8621	1.69	0.9545	2.29	0.9890	3.70	0.9999
0.50	0.6915	1.10	0.8643	1.70	0.9554	2.30	0.9893	3.75	0.9999
0.51	0.6950	1.11	0.8665	1.71	0.9564	2.31	0.9896	3.80	0.9999
0.52	0.6985	1.12	0.8686	1.72	0.9573	2.32	0.9898	3.85	0.9999
0.53	0.7019	1.13	0.8708	1.73	0.9582	2.33	0.9901	3.90	1.0000
0.54	0.7054	1.14	0.8729	1.74	0.9591	2.34	0.9904	3.95	1.0000
0.55	0.7088	1.15	0.8749	1.75	0.9599	2.35	0.9906	4.00	1.0000
0.56	0.7123	1.16	0.8770	1.76	0.9608	2.36	0.9909		
0.57	0.7157	1.17	0.8790	1.77	0.9616	2.37	0.9911		
0.58	0.7190	1.18	0.8810	1.78	0.9625	2.38	0.9913		
0.59	0.7224	1.19	0.8830	1.79	0.9633	2.39	0.9916		

Todennäköisyyslaskennan kurssi — erilliskoe 14. 8. 2008

Kokeessa ei saa käyttää taulukkokirjaa!

1. Eräässä perheessä on (tasan) neljä lasta.

   a) Millä todennäköisyydellä ainakin yksi on tyttö?

   b) Millä todennäköisyydellä nuorin lapsista on tyttö, kun tiedetään, että ainakin yksi on tyttö?

   Tässä oletetaan tyttö- ja poikasyntymät yhtä todennäköisiksi ja eri lasten osalta toisistaan riippumattomiksi.

2. a) Miten määritellään Poisson-jakauma $P(\mu)$? Mitkä ovat sen odotusarvo ja varianssi? (Perusteluja ei vaadita.)

   b) Tehdas valmistaa keksejä, joissa on suklaarakeita. Rakeiden lukumäärä kussakin keksissä on Poisson-jakautunut, ja rakeita tulee olla ainakin yksi todennäköisyydellä ≥ 0.99. Miten parametri μ on valittava? Millä todennäköisyydellä rakeita on ainakin kaksi?

   [*Huom.* Casellan ja Bergerin kirjassa Poisson-jakaumaa merkitään $Poisson(\mu)$.]

3. Noudattakoon satunnaismuuttuja X välin $(0, 1)$ tasajakaumaa. Olkoon $Y = \sqrt{X}$. Johda satunnaismuuttujan Y kertymäfunktio ja tiheysfunktio. Selvitä myös, ovatko X ja Y riippumattomat.

4. Olkoot $X_1, X_2, \ldots$ riippumattomia samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, joilla on odotusarvo μ ja äärellinen varianssi σ^2. Keskeisen raja-arvolauseen perusteella muuttujien $X_1, \ldots, X_n$ summat (tai keskiarvot) sopivasti normitettuina suppenevat jakaumaltaan kohti standardinormaalisti jakautunutta muuttujaa, kun $n \to \infty$. Lausu tämä tulos tarkasti. Arvioi sen avulla todennäköisyyttä $P\{\sum_{i=1}^{24} X_i > 10\}$, kun $X_1, \ldots, X_{24}$ ovat riippumattomia ja noudattavat välin $(0, 1)$ tasajakaumaa.

   Kääntöpuolella on standardinormaalijakauman kertymäfunktion taulukko.

5. Oletetaan, että $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ ovat riippumattomia. Määritellään otoskeskiarvo

   $$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

   ja otosvarianssi

   $$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \overline{X})^2.$$

   Kuvaile täydellisesti (ilman todistuksia) parin $(\overline{X}, S^2)$ yhteisjakauma. Vastauksesta on käytävä ilmi erityisesti komponenttien reunajakaumat ja odotusarvot sekä niiden välinen (mahdollinen) riippuvuusmekanismi.

Table of the Standard Normal Distribution Function

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.5000	0.60	0.7257	1.20	0.8849	1.80	0.9641	2.40	0.9918
0.01	0.5040	0.61	0.7291	1.21	0.8869	1.81	0.9649	2.41	0.9920
0.02	0.5080	0.62	0.7324	1.22	0.8888	1.82	0.9656	2.42	0.9922
0.03	0.5120	0.63	0.7357	1.23	0.8907	1.83	0.9664	2.43	0.9925
0.04	0.5160	0.64	0.7389	1.24	0.8925	1.84	0.9671	2.44	0.9927
0.05	0.5199	0.65	0.7422	1.25	0.8944	1.85	0.9678	2.45	0.9929
0.06	0.5239	0.66	0.7454	1.26	0.8962	1.86	0.9686	2.46	0.9931
0.07	0.5279	0.67	0.7486	1.27	0.8980	1.87	0.9693	2.47	0.9932
0.08	0.5319	0.68	0.7517	1.28	0.8997	1.88	0.9699	2.48	0.9934
0.09	0.5359	0.69	0.7549	1.29	0.9015	1.89	0.9706	2.49	0.9936
0.10	0.5398	0.70	0.7580	1.30	0.9032	1.90	0.9713	2.50	0.9938
0.11	0.5438	0.71	0.7611	1.31	0.9049	1.91	0.9719	2.52	0.9941
0.12	0.5478	0.72	0.7642	1.32	0.9066	1.92	0.9726	2.54	0.9945
0.13	0.5517	0.73	0.7673	1.33	0.9082	1.93	0.9732	2.56	0.9948
0.14	0.5557	0.74	0.7704	1.34	0.9099	1.94	0.9738	2.58	0.9951
0.15	0.5596	0.75	0.7734	1.35	0.9115	1.95	0.9744	2.60	0.9953
0.16	0.5636	0.76	0.7764	1.36	0.9131	1.96	0.9750	2.62	0.9956
0.17	0.5675	0.77	0.7794	1.37	0.9147	1.97	0.9756	2.64	0.9959
0.18	0.5714	0.78	0.7823	1.38	0.9162	1.98	0.9761	2.66	0.9961
0.19	0.5753	0.79	0.7852	1.39	0.9177	1.99	0.9767	2.68	0.9963
0.20	0.5793	0.80	0.7881	1.40	0.9192	2.00	0.9773	2.70	0.9965
0.21	0.5832	0.81	0.7910	1.41	0.9207	2.01	0.9778	2.72	0.9967
0.22	0.5871	0.82	0.7939	1.42	0.9222	2.02	0.9783	2.74	0.9969
0.23	0.5910	0.83	0.7967	1.43	0.9236	2.03	0.9788	2.76	0.9971
0.24	0.5948	0.84	0.7995	1.44	0.9251	2.04	0.9793	2.78	0.9973
0.25	0.5987	0.85	0.8023	1.45	0.9265	2.05	0.9798	2.80	0.9974
0.26	0.6026	0.86	0.8051	1.46	0.9279	2.06	0.9803	2.82	0.9976
0.27	0.6064	0.87	0.8079	1.47	0.9292	2.07	0.9808	2.84	0.9977
0.28	0.6103	0.88	0.8106	1.48	0.9306	2.08	0.9812	2.86	0.9979
0.29	0.6141	0.89	0.8133	1.49	0.9319	2.09	0.9817	2.88	0.9980
0.30	0.6179	0.90	0.8159	1.50	0.9332	2.10	0.9821	2.90	0.9981
0.31	0.6217	0.91	0.8186	1.51	0.9345	2.11	0.9826	2.92	0.9983
0.32	0.6255	0.92	0.8212	1.52	0.9357	2.12	0.9830	2.94	0.9984
0.33	0.6293	0.93	0.8238	1.53	0.9370	2.13	0.9834	2.96	0.9985
0.34	0.6331	0.94	0.8264	1.54	0.9382	2.14	0.9838	2.98	0.9986
0.35	0.6368	0.95	0.8289	1.55	0.9394	2.15	0.9842	3.00	0.9987
0.36	0.6406	0.96	0.8315	1.56	0.9406	2.16	0.9846	3.05	0.9989
0.37	0.6443	0.97	0.8340	1.57	0.9418	2.17	0.9850	3.10	0.9990
0.38	0.6480	0.98	0.8365	1.58	0.9429	2.18	0.9854	3.15	0.9992
0.39	0.6517	0.99	0.8389	1.59	0.9441	2.19	0.9857	3.20	0.9993
0.40	0.6554	1.00	0.8413	1.60	0.9452	2.20	0.9861	3.25	0.9994
0.41	0.6591	1.01	0.8437	1.61	0.9463	2.21	0.9864	3.30	0.9995
0.42	0.6628	1.02	0.8461	1.62	0.9474	2.22	0.9868	3.35	0.9996
0.43	0.6664	1.03	0.8485	1.63	0.9485	2.23	0.9871	3.40	0.9997
0.44	0.6700	1.04	0.8508	1.64	0.9495	2.24	0.9875	3.45	0.9997
0.45	0.6736	1.05	0.8531	1.65	0.9505	2.25	0.9878	3.50	0.9998
0.46	0.6772	1.06	0.8554	1.66	0.9515	2.26	0.9881	3.55	0.9998
0.47	0.6808	1.07	0.8577	1.67	0.9525	2.27	0.9884	3.60	0.9998
0.48	0.6844	1.08	0.8599	1.68	0.9535	2.28	0.9887	3.65	0.9999
0.49	0.6879	1.09	0.8621	1.69	0.9545	2.29	0.9890	3.70	0.9999
0.50	0.6915	1.10	0.8643	1.70	0.9554	2.30	0.9893	3.75	0.9999
0.51	0.6950	1.11	0.8665	1.71	0.9564	2.31	0.9896	3.80	0.9999
0.52	0.6985	1.12	0.8686	1.72	0.9573	2.32	0.9898	3.85	0.9999
0.53	0.7019	1.13	0.8708	1.73	0.9582	2.33	0.9901	3.90	1.0000
0.54	0.7054	1.14	0.8729	1.74	0.9591	2.34	0.9904	3.95	1.0000
0.55	0.7088	1.15	0.8749	1.75	0.9599	2.35	0.9906	4.00	1.0000
0.56	0.7123	1.16	0.8770	1.76	0.9608	2.36	0.9909		
0.57	0.7157	1.17	0.8790	1.77	0.9616	2.37	0.9911		
0.58	0.7190	1.18	0.8810	1.78	0.9625	2.38	0.9913		
0.59	0.7224	1.19	0.8830	1.79	0.9633	2.39	0.9916		

Todennäköisyyslaskennan kurssi, loppukoe 21.10.2008

Vastaa joko pelkästään kysymyksiin 1–5 tai pelkästään kysymyksiin 6–10, ei molempiin.
Either answer the questions 1–5 or questions 6–10, not both.

P. Niemisen materiaalin perustuvat kysymykset
Kokeessa ei saa käyttää taulukkokirjaa

1. Pokerikäsi on kolmoset, jos se sisältää kolme arvoltaan samaa korttia, ja muut kaksi korttia ovat keskenään eri arvoisia ja lisäksi eri arvoisia kuin kolmosten arvo. Kirjoita lauseke todennäköisyydelle saada kolmoset, kun perusteellisesti sekoitetusta 52 kortin pakasta jaetaan viisi korttia. Lauseketta ei tarvitse sieventää, vaan se saa sisältää esim. binomikertoimia. Sen sijaan lauseke pitää perustella sanallisesti.

(Tavallisessa 52 kortin korttipakassa kukin kortti kuuluu yhteen neljästä maasta; kuhunkin maahan kuuluu 13 korttia, joilla on kullakin eri arvo; kutakin 13:a arvoa on pakassa yksi kortti kustakin maasta.)

2. Olkoon
$$Y = \mathrm{e}^X, \quad \text{jossa} \quad X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

a) Johda satunnaismuuttujan Y odotusarvo ja varianssi.

b) Johda satunnaismuuttujan Y tiheysfunktio.

3. Olkoot X ja Y riippumattomia satunnaismuuttujia, joiden jakaumat ovat
$$X \sim G(\alpha, 1), \qquad Y \sim G(\beta, 1).$$

Gammajakauman $G(\alpha, \lambda)$ tiheysfunktio on
$$f(x \mid \alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda x}, \qquad x > 0.$$

Laske satunnaismuuttujan $U = X/Y$ tiheysfunktio.

4. Olkoon $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$ vakiovektori ja $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ symmetrinen ja positiivisesti definiitti matriisi.

a) Anna jokin määritelmä multinormaalijakaumalle $N_m(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.

b) Satunnaismuuttujalla $(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})$ on eräs kurssilla käsitelty jakauma. Mikä?

5.

1. Olkoon $Y_1, Y_2, \ldots$ jono satunnaismuuttujia. Miten määritellään, että tämä jono suppenee stokastisesti kohti satunnaismuuttujaa Y?

2. Olkoot $X_1, X_2, \ldots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, joille $EX_i = \mu$ ja $\operatorname{var} X_i < \infty$. Todista, että n ensimmäisen muuttujan artimeettinen keskiarvo suppenee stokastisesti kohti arvoa μ, kun $n \to \infty$.

Todennäköisyyslaskennan kurssi, final examination 21.10.2008

Vastaa joko pelkästään kysymyksiin 1–5 tai pelkästään kysymyksiin 6–10, ei molempiin.
Either answer the questions 1–5 or questions 6–10, not both.

Questions based on the book by Casella and Berger
You are not allowed to use mathematical tables in the examination

6. The poker hand *three of a kind* contains three cards of the same rank (i.e., the triple), plus two unmatched cards. The two unmatched cards are not of the same rank, and what is more, their ranks are distinct from the rank of the triple. Give a formula for the probability of obtaining three of a kind, when five cards are dealt from a thoroughly shuffled standard deck of cards. It is unncessary to simplify the formula: it may contain binomial coefficients. However, you must explain your formula verbally.

(A standard deck contains 52 cards. Each card belongs to one of four suits; each suit consists of 13 cards of different ranks (or denominations); there are four cards of each rank).

7. Let X and Y be independent random variables with distributions

$$X \sim \mathrm{Gamma}(\alpha, 1), \qquad Y \sim \mathrm{Gamma}(\beta, 1).$$

Gamma distribution with parameters $\alpha, s > 0$ has the probability density function

$$f(x \mid \alpha, s) = \frac{1}{\beta^\alpha \, \Gamma(\alpha)} \, x^{\alpha-1} \, \mathrm{e}^{-x/s}, \qquad x > 0.$$

Calculate the probability density function of $U = X/Y$.

8. Consider the hierarchical model

$$\begin{aligned} X \mid \Lambda &\sim \mathrm{Poisson}(\Lambda) \\ \Lambda &\sim \mathrm{Gamma}(\alpha, \beta), \end{aligned}$$

where $\alpha, \beta > 0$ are known constants. Describe the marginal distribution of X, and calculate its mean.

9. In the setting of the previous problem, calculate the conditional variance of X given $\Lambda = \lambda$. Also calculate the (unconditional) variance of X.

10.

a) Let $Y_1, Y_2, \ldots$ be a sequence of random variables. How do you define that the sequence converges in probability to a random variable Y?

b) Suppose that the random variables $X_1, X_2, \ldots$ are iid with $EX_i = \mu$ and $\operatorname{var} X_i < \infty$. Show that the arithmetic mean of the first n variables converges to μ in probability, when $n \to \infty$.

Todennäköisyyslaskennan kurssi, loppukoe 22.1.2009

Kokeessa ei saa käyttää taulukkokirjaa

1. Olkoon X:llä Poissonin jakauma odotusarvolla $\theta > 0$. Kirjoita lausekkeet X:n pistetodennäköisyysfunktiolle varianssille, momenttiemäfunktiolle ja kolmelle ensimmäiselle momentille EX^j, $j = 1, 2, 3$. (Osan tuloksista muistat, ja osan joudut johtamaan. Kirjoita myös johdot.)

2. Olkoot X, Y ja Z satunnaismuuttujia, joista Z saa vain positiivisia arvoja. Oletamme, että kaikki tässä tehtävässä tarvittavat odotusarvot ovat olemassa reaalilukuina. Alla a-, b- ja c-kohdassa annetaan kussakin kaksi suuretta, joiden välillä vallitsee tietty epäyhtälö. Kirjoita epäyhtälö sekä selitä, miten se seuraa jostakin kurssilla esiintyneestä kuuluisasta epäyhtälöstä.

a) $E\left(\frac{1}{Z}\right)$ ja $\frac{1}{EZ}$.

b) $E\ln(Z)$ ja $\ln(EZ)$.

c) $\sqrt{(\operatorname{var} X)(\operatorname{var} Y)}$ ja $|\operatorname{cov}(X, Y)|$.

3. Tarkastellaan hierarkkista mallia

$$\begin{aligned} X \mid Y &\sim N(0, Y^2) \\ Y &\sim \mathrm{U}(0, 1). \end{aligned}$$

Tässä $N(\mu, \sigma^2)$ on normaalijakauma odotusarvolla μ ja varianssilla σ^2, ja $\mathrm{U}(a, b)$ on välin (a, b) tasajakauma.

a) Anna konkreettinen kaava satunnaismuuttujien X ja Y yhteistiheysfunktiolle. Anna kaava X:n reunajakauman tiheysfunktiolle integraalina. (Integraalia ei tarvitse sieventää).

b) Laske EX ja $\operatorname{var} X$.

4. Olkoot X ja Y riippumattomia satunnaismuuttujia, joiden jakaumat ovat

$$X \sim \mathrm{Gam}(\alpha, 1), \qquad Y \sim \mathrm{Gam}(\beta, 1).$$

Gammajakauman $\mathrm{Gam}(\alpha, \lambda)$ tiheysfunktio on

$$f(x \mid \alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \qquad x > 0.$$

Laske muuttujien U ja V yhteistiheysfunktio, kun $U = X/Y$ ja $V = Y$. Laske lisäksi satunnaismuuttujan U reunatiheysfunktio.

5. Olkoon $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$ vakiovektori ja $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ symmetrinen ja positiivisesti definiitti matriisi.

a) Anna määritelmä multinormaalijakaumalle $N_m(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.

b) Satunnaismuuttujalla $(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})$ on eräs tuttu jakauma. Kerro perustelujen kera, mikä se on.

Todennäköisyyslaskennan kurssi, loppukoe 2.4.2009

Kokeessa ei saa käyttää taulukkokirjaa

1. Bernoullin kokeessa joko onnistutaan tai epäonnistutaan, ja onnistumistodennäköisyys yhdessä kokeessa on $0 < p < 1$. Bernoullin koetta toistetaan riippumattomasti, kunnes onnistutaan r kertaa, jossa $r \geq 1$ on jokin annettu kokonaisluku. Olkoon Y sen toiston järjestysluku, jolla onnistutaan r:nnen kerran (kun ensimmäisen toiston järjestysluku on yksi). Määritellään lisäksi, että X on epäonnistumisten lukumäärä, ennenkuin onnistutaan r:nnen kerran.

Johda lauseke satunnaismuuttujan Y pistetodennäköisyysfunktiolle (ptnf). Selitä myös, miten X:n ptnf saadaan laskettua Y:n ptnf:n nojalla.

2. Olkoot X ja Y riippumattomia välin $(0, 1)$ tasajakaumaa noudattavia satunnaismuuttujia. Olkoon Z sen origokeskeisen ympyrän pinta-ala, jonka kaari kulkee pisteen (X, Y) kautta. (Ympyrän pinta-ala $Z = \pi R^2$, ja ympyrän säde $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$).

Laske EZ ja $\operatorname{var} Z$.

3. Satunnaismuuttujien X ja Y yhteistiheysfunktio on

$$f_{X,Y}(x, y) = 8\,xy, \qquad \text{kun } 0 < x < y < 1,$$

ja nolla muualla. Laske muuttujien X ja Y reunajakaumien tiheysfunktiot, ehdolliset tiheysfunktiot $f_{X|Y}$ sekä $f_{Y|X}$ sekä ehdolliset odotusarvot $E[X \mid Y = y]$ ja $E[Y \mid X = x]$.

4. Olkoot X ja Y riippumattomia eksponenttijakaumaa noudattavia satunnaismuuttujia siten, että $EX = EY = 1$. Määritellään satunnaismuuttujat U ja V kaavoilla

$$U = X + Y, \qquad V = X - Y.$$

Johda satunnaismuuttujien U ja V yhteistiheysfunktio. Laske lisäksi satunnaismuuttujan U reunatiheysfunktio.

5. Olkoon satunnaisvektorilla $\mathbf{X}$ n-ulotteinen normaalijakauma $N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I})$. Olkoon $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonaalinen matriisi (eli $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$). Määritellään satunnaisvektori $\mathbf{Y}$ kaavalla

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Q}\,\mathbf{X}.$$

Jaetaan $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ kahtia siten, että vektori $\mathbf{U} = (Y_1, \ldots, Y_k)$ koostuu sen k ensimmäisestä komponentista $(1 \leq k < n)$ ja $\mathbf{V} = (Y_{k+1}, \ldots, Y_n)$ sen lopuista komponenteista. Määritellään satunnaismuuttujat Z_1 ja Z_2 kaavoilla

$$Z_1 = \mathbf{U}^T\,\mathbf{U}, \qquad Z_2 = \mathbf{V}^T\,\mathbf{V}.$$

a) Mikä on satunnaisvektorin $\mathbf{Y}$ jakauma?

b) Perustele, miksi Z_1 ja Z_2 ovat riippumattomia.

c) Mikä on satunnaismuuttujan Z_1 reunajakauma? Mikä on satunnaismuuttujan Z_2 reunajakauma?

Todennäköisyyslaskennan kurssi, loppukoe 11.6.2009

Kokeessa ei saa käyttää taulukkokirjaa

1. Olkoon satunnaismuuttujalla Y normaalijakauma $N(\mu, \sigma^2)$, ja olkoon $X = \exp(Y)$. Johda satunnaismuuttujan X tiheysfunktio, odotusarvo sekä varianssi.

2. Satunnaismuuttujien X ja Y yhteistiheysfunktio on

$$f(x, y) = c\,xy, \quad \text{kun } 0 < y < x < 1,$$

ja nolla muualla.

a) Anna ehto, joka vakion c pitää toteuttaa, ja ratkaise c:n arvo.

b) Laske todennäköisyys $P(X + Y < 1)$.

3. Olkoon satunnaisvektorilla $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ odotusarvo ja kovarianssimatriisi

$$E\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{cov} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Laske satunnaismuuttujan $Y = X_1 - X_2 + 2X_3 - 5$ odotusarvo ja varianssi.

4. Tarkastellaan hierarkkista mallia

$$\begin{aligned} X \mid Y &\sim \operatorname{Bin}(Y, p) \\ Y &\sim \operatorname{Poi}(\mu), \end{aligned}$$

jossa $\mu > 0$ ja $0 < p < 1$ ovat vakioita. $\operatorname{Poi}(\mu)$ tarkoittaa Poissonin jakaumaa odotusarvolla μ ja $\operatorname{Bin}(n, p)$ binomijakaumaa otoskoolla n ja onnistumistodennäköisyydellä p.

a) Kirjoita lauseke X:n ja Y:n yhteispistetodennnäköisyysfunktiolle.

b) Laske $E(X \mid Y)$ sekä EX.

c) Laske $\operatorname{var}(X \mid Y)$ sekä $\operatorname{var} X$.

5. Olkoot X ja Y riippumattomia satunnaismuuttujia, joilla on gammajakaumat

$$X \sim G(\alpha, 1), \qquad Y \sim G(\beta, 1).$$

Gammajakauman $G(\alpha, \lambda)$ tiheysfunktio on

$$f(x \mid \alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \qquad x > 0.$$

Johda satunnaismuuttujan $U = X/Y$ tiheysfunktio.