Todennäköisyyslaskennan kurssi — 2. kurssikoe (17. 12. 2007)

Kokeessa ei saa käyttää taulukkokirjaa!

1. Satunnaismuuttujaparin (X, Y) yhteistiheysfunktio on

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}y, & \text{kun } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Johda muuttujan X reunajakauma ja laske todennäköisyys $P\{X > Y\}$. (5 p.)

2. Olkoot X ja Y satunnaismuuttujia, joilla on äärelliset odotusarvot ja varianssit.

a) Miten määritellään X:n ja Y:n korrelaatiokerroin $\operatorname{cor}(X, Y)$? Määrittele myös mahdollisesti tarvittavat apukäsitteet. Millaisia arvoja korrelaatiokerroin voi saada?
b) Muuttujia X ja Y sanotaan korreloimattomiksi, mikäli $\operatorname{cor}(X, Y) = 0$. Selosta, miten tämä suhtautuu riippumattomuuteen: Jos X ja Y ovat korreloimattomat, ovatko ne aina riippumattomat? Entä päteekö käänteinen implikaatio? (Todistuksia ei vaadita.) (5 p.)

3. Satunnaismuuttujapari (X, Y) noudattaa normaalijakaumaa $N_2\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right)$. Mikä on a) X:n reunajakauma, b) summan $X + Y$ jakauma? Kerro tarvittavat perustelut lyhyesti. (5 p.)

4. a) Olkoon (Y_n) jono satunnaismuuttujia. Miten määritellään se, että jono (Y_n) suppenee jakaumaltaan kohti satunnaismuuttujaa Y, ts. $Y_n \xrightarrow{d} Y$?
b) Olkoot $X_1, X_2, \ldots$ riippumattomia samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, joilla on odotusarvo μ ja äärellinen varianssi σ^2. Keskeisen raja-arvolauseen mukaan muuttujien $X_1, \ldots, X_n$ summat (tai keskiarvot) sopivasti normitettuina suppenevat jakaumaltaan kohti standardinormaalisti jakautunutta muuttujaa, kun $n \to \infty$. Lausu tämä tulos tarkasti. Arvioi sen avulla todennäköisyyttä $P\{\sum_{i=1}^{100} X_i > 130\}$, kun $\mu = 1$ ja $\sigma^2 = 4$.

Kääntöpuolella on standardinormaalijakauman kertymäfunktion taulukko. (5 p.)

Muista vastata kurssikyselyyn:
`http://mathstat.helsinki.fi/kurssit/kysely/`

Table of the Standard Normal Distribution Function

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.5000	0.60	0.7257	1.20	0.8849	1.80	0.9641	2.40	0.9918
0.01	0.5040	0.61	0.7291	1.21	0.8869	1.81	0.9649	2.41	0.9920
0.02	0.5080	0.62	0.7324	1.22	0.8888	1.82	0.9656	2.42	0.9922
0.03	0.5120	0.63	0.7357	1.23	0.8907	1.83	0.9664	2.43	0.9925
0.04	0.5160	0.64	0.7389	1.24	0.8925	1.84	0.9671	2.44	0.9927
0.05	0.5199	0.65	0.7422	1.25	0.8944	1.85	0.9678	2.45	0.9929
0.06	0.5239	0.66	0.7454	1.26	0.8962	1.86	0.9686	2.46	0.9931
0.07	0.5279	0.67	0.7486	1.27	0.8980	1.87	0.9693	2.47	0.9932
0.08	0.5319	0.68	0.7517	1.28	0.8997	1.88	0.9699	2.48	0.9934
0.09	0.5359	0.69	0.7549	1.29	0.9015	1.89	0.9706	2.49	0.9936
0.10	0.5398	0.70	0.7580	1.30	0.9032	1.90	0.9713	2.50	0.9938
0.11	0.5438	0.71	0.7611	1.31	0.9049	1.91	0.9719	2.52	0.9941
0.12	0.5478	0.72	0.7642	1.32	0.9066	1.92	0.9726	2.54	0.9945
0.13	0.5517	0.73	0.7673	1.33	0.9082	1.93	0.9732	2.56	0.9948
0.14	0.5557	0.74	0.7704	1.34	0.9099	1.94	0.9738	2.58	0.9951
0.15	0.5596	0.75	0.7734	1.35	0.9115	1.95	0.9744	2.60	0.9953
0.16	0.5636	0.76	0.7764	1.36	0.9131	1.96	0.9750	2.62	0.9956
0.17	0.5675	0.77	0.7794	1.37	0.9147	1.97	0.9756	2.64	0.9959
0.18	0.5714	0.78	0.7823	1.38	0.9162	1.98	0.9761	2.66	0.9961
0.19	0.5753	0.79	0.7852	1.39	0.9177	1.99	0.9767	2.68	0.9963
0.20	0.5793	0.80	0.7881	1.40	0.9192	2.00	0.9773	2.70	0.9965
0.21	0.5832	0.81	0.7910	1.41	0.9207	2.01	0.9778	2.72	0.9967
0.22	0.5871	0.82	0.7939	1.42	0.9222	2.02	0.9783	2.74	0.9969
0.23	0.5910	0.83	0.7967	1.43	0.9236	2.03	0.9788	2.76	0.9971
0.24	0.5948	0.84	0.7995	1.44	0.9251	2.04	0.9793	2.78	0.9973
0.25	0.5987	0.85	0.8023	1.45	0.9265	2.05	0.9798	2.80	0.9974
0.26	0.6026	0.86	0.8051	1.46	0.9279	2.06	0.9803	2.82	0.9976
0.27	0.6064	0.87	0.8079	1.47	0.9292	2.07	0.9808	2.84	0.9977
0.28	0.6103	0.88	0.8106	1.48	0.9306	2.08	0.9812	2.86	0.9979
0.29	0.6141	0.89	0.8133	1.49	0.9319	2.09	0.9817	2.88	0.9980
0.30	0.6179	0.90	0.8159	1.50	0.9332	2.10	0.9821	2.90	0.9981
0.31	0.6217	0.91	0.8186	1.51	0.9345	2.11	0.9826	2.92	0.9983
0.32	0.6255	0.92	0.8212	1.52	0.9357	2.12	0.9830	2.94	0.9984
0.33	0.6293	0.93	0.8238	1.53	0.9370	2.13	0.9834	2.96	0.9985
0.34	0.6331	0.94	0.8264	1.54	0.9382	2.14	0.9838	2.98	0.9986
0.35	0.6368	0.95	0.8289	1.55	0.9394	2.15	0.9842	3.00	0.9987
0.36	0.6406	0.96	0.8315	1.56	0.9406	2.16	0.9846	3.05	0.9989
0.37	0.6443	0.97	0.8340	1.57	0.9418	2.17	0.9850	3.10	0.9990
0.38	0.6480	0.98	0.8365	1.58	0.9429	2.18	0.9854	3.15	0.9992
0.39	0.6517	0.99	0.8389	1.59	0.9441	2.19	0.9857	3.20	0.9993
0.40	0.6554	1.00	0.8413	1.60	0.9452	2.20	0.9861	3.25	0.9994
0.41	0.6591	1.01	0.8437	1.61	0.9463	2.21	0.9864	3.30	0.9995
0.42	0.6628	1.02	0.8461	1.62	0.9474	2.22	0.9868	3.35	0.9996
0.43	0.6664	1.03	0.8485	1.63	0.9485	2.23	0.9871	3.40	0.9997
0.44	0.6700	1.04	0.8508	1.64	0.9495	2.24	0.9875	3.45	0.9997
0.45	0.6736	1.05	0.8531	1.65	0.9505	2.25	0.9878	3.50	0.9998
0.46	0.6772	1.06	0.8554	1.66	0.9515	2.26	0.9881	3.55	0.9998
0.47	0.6808	1.07	0.8577	1.67	0.9525	2.27	0.9884	3.60	0.9998
0.48	0.6844	1.08	0.8599	1.68	0.9535	2.28	0.9887	3.65	0.9999
0.49	0.6879	1.09	0.8621	1.69	0.9545	2.29	0.9890	3.70	0.9999
0.50	0.6915	1.10	0.8643	1.70	0.9554	2.30	0.9893	3.75	0.9999
0.51	0.6950	1.11	0.8665	1.71	0.9564	2.31	0.9896	3.80	0.9999
0.52	0.6985	1.12	0.8686	1.72	0.9573	2.32	0.9898	3.85	0.9999
0.53	0.7019	1.13	0.8708	1.73	0.9582	2.33	0.9901	3.90	1.0000
0.54	0.7054	1.14	0.8729	1.74	0.9591	2.34	0.9904	3.95	1.0000
0.55	0.7088	1.15	0.8749	1.75	0.9599	2.35	0.9906	4.00	1.0000
0.56	0.7123	1.16	0.8770	1.76	0.9608	2.36	0.9909		
0.57	0.7157	1.17	0.8790	1.77	0.9616	2.37	0.9911		
0.58	0.7190	1.18	0.8810	1.78	0.9625	2.38	0.9913		
0.59	0.7224	1.19	0.8830	1.79	0.9633	2.39	0.9916		

Todennäköisyyslaskennan kurssi s-2008, 2. kurssikoe 15.12.2008

Kokeessa ei saa käyttää taulukkokirjaa. Anna kurssista palautetta WebOodissa

1. Olkoon satunnaisvektorilla (X, Y) tasajakauma sen ympyrän sisällä, jonka keskipiste on $(\frac{1}{2}, 0)$ ja säde on $\frac{1}{2}$. (Tämän ympyrän pinta-ala on $\pi/4$, ja yhteistiheysfunktiolla on nollasta poikkeava arvo, kun $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 < \frac{1}{4}$.) Johda X:n reunajakauman tiheysfunktio. Johda ja nimeä Y:n ehdollinen tiheysfunktio ehdolla $X = x$ (kun $0 < x < 1$).

2. Tarkastellaan hierarkkista mallia, jossa

$$\begin{aligned} X \mid S &\sim N(\mu, \frac{1}{S}) \\ S &\sim \mathrm{Gam}(\alpha, 1). \end{aligned}$$

Tässä $\alpha > 1$ ja $\mu \in \mathbb{R}$ ovat vakioita, ja normaalijakauman $N(\mu, \sigma^2)$ toinen parametri on sen varianssi. Gammajakauman tiheysfunktion kaava löytyy alta.

Laske $E[X \mid S]$, EX (opastus: iteroitu odotusarvo), $E[X^2 \mid S]$, EX^2 sekä $E(SX^2)$.

3. Olkoot X ja Y riippumattomia gammajakautuneita satunnaismuuttujia siten, että

$$X \sim \mathrm{Gam}(\alpha, 1) \qquad Y \sim \mathrm{Gam}(\beta, 1).$$

(Gammajakauman tiheysfunktion kaava löytyy alta.) Määritellään

$$S = X + Y, \qquad Z = X/S.$$

Laske S:n ja Z:n yhteistiheysfunktio, sekä Z:n reunajakauman tiheysfunktio.

4. Olkoon satunnaisvektorilla (X, Y) kaksiulotteinen normaalijakauma siten, että

$$EX = 0, \quad EY = 0, \quad \operatorname{var} X = \sigma_X^2, \quad \operatorname{var} Y = \sigma_Y^2, \quad \operatorname{cov}(X, Y) = \rho\,\sigma_X \sigma_Y,$$

jossa $\sigma_X, \sigma_Y > 0$ ja $-1 < \rho < 1$. Määritellään Z kaavalla $Z = Y - bX$, jossa vakion b arvo valitaan a-kohdassa.

a) Laske vakiolle b sellainen arvo, että $\operatorname{cov}(Z, X) = 0$, ja laske tämän jälkeen EZ ja $\operatorname{var} Z$. Perustele, miksi Z ja X ovat riippumattomia. (4 pistettä)

b) Johda Y:n ehdollinen jakauma ehdolla $X = x$ (joko hyödyntämällä a-kohdan tulosta tai jollakin muulla keinolla). (2 pistettä)

Kaavoja

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t, \quad t > 0, \qquad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(t+1) = t\,\Gamma(t).$$

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1}\, \mathrm{d}x = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \qquad a, b > 0.$$

Gammajakauman $\mathrm{Gam}(\alpha, \lambda)$ tf (kun $\alpha, \lambda > 0$): $\quad \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda x}, \qquad x > 0.$

Beetajakauman $\mathrm{Be}(\alpha, \beta)$ tf (kun $\alpha, \beta > 0$): $\quad \dfrac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \qquad 0 < x < 1.$