Todennäköisyyslaskennan kurssi s-2008, 1. kurssikoe 20.10.2008

Kokeessa ei saa käyttää taulukkokirjaa.

1. Huijarilla on taskussaan kolme euron kolikkoa, joista kaksi on tavallista, mutta kolmas väärennetty. Väärennetyn kolikon molemmilla puolilla on klaava. Huijari valitsee yhden kolikoista umpimähkään, ja heittää kolikkoa rehellisesti. Tulos on klaava. Millä todennäköisyydellä huijari valitsi väärennetyn kolikon?

2. Olkoon X:llä eksponenttijakauma odotusarvolla $1/\lambda$, jossa $\lambda > 0$. Kirjoita lausekkeet X:n tiheysfunktiolle, kertymäfunktiolle, kvantiilifunktiolle, varianssille ja mediaanille. (Osan tuloksista muistat, ja osan joudut johtamaan. Kirjoita myös johdot.) Tarkista, että antamallasi kertymäfunktion lausekkeella on kertymäfunktiolta vaadittavat ominaisuudet.

3. Olkoot U ja V riippumattomia satunnaismuuttujia, joilla on jakaumat

$$U \sim N(0,1), \quad V \sim N(1,2).$$

(Normaalijakauman $N(\mu, \sigma^2)$ ensimmäinen parametri on sen odotusarvo ja toinen sen varianssi.) Määritellään

$$X = U - 2V, \qquad Y = U^2 V.$$

a) Laske X:n odotusarvo ja varianssi.

b) Laske Y:n odotusarvo.

c) Laske Y:n varianssi.

4. Satunnaismuuttuja X määritellään samoin kuin edellisessä tehtävässä.

a) Laske X:n momenttiemäfunktio.

b) Tunnista X:n jakauma sen momenttiemäfunktion perusteella.

Kaavoja

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} \, e^{-t} \, dt, \qquad t > 0,$$

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(t+1) = t\,\Gamma(t).$$

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1} \, (1-x)^{b-1} \, dx = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \qquad a, b > 0.$$

$$e^x = \sum_{j=0}^\infty \frac{x^j}{j!}.$$

$$(1+x)^r = \sum_{j=0}^\infty \binom{r}{j} x^j, \qquad |x| < 1.$$