Tilastollisen päättelyn kurssin yleistentti

1. Havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat ovat $Y_1, ..., Y_n$ » $P(\theta)$ **k** .

a) Johda parametrin θ suurimman uskottavuuden estimaattori.

b) Osoita, että parametrin θ suurimman uskottavuuden estimaattori on täystehokas.

2. a) Tarkastellaan tilastollista mallia $f_Y(y;\mu)$. Miten määritellään ehdollisen jakauman avulla parametrin μ tyhjentävä tunnusluku? Mikä tunnusluku on aina tyhjentävä (ns. triviaali tyhjentävä tunnusluku)?

b) Havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat $Y_1, ..., Y_n$ ovat riippumattomia ja noudattavat kukin jatkuvaa jakaumaa, jonka tiheysfunktio on

$$f(y;\theta) = \theta y^{\theta \text{ i } 1}, \quad 0 < y < 1,$$

jossa $\theta > 0$. Etsi parametrille θ yksiulotteinen tyhjentävä tunnusluku.

3. Oletetaan, että havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat $Y_1, ..., Y_n$ ovat riippumattomia ja noudattavat kukin jatkuvaa jakaumaa, jonka tiheysfunktio on

$$f(y;\theta) = \theta^{\text{ i } 2} y \exp(\text{¡ } y/\theta), \quad y > 0,$$

jossa $\theta > 0$. Kysymyksessä on gammajakauman erikoistapaus. Integroimalla nähdään, että $E(Y_i) = 2\theta$ ja $var(Y_i) = 2\theta^2$. Johda uskottavuusosamäärätesti, Waldin testi ja pistemäärätesti nollahypoteesille H_0: $\theta = \theta_0$ kaksisuuntaista vaihtoehtoa H_1: $\theta = \theta_0$ vastaan.

4. Tarkastellaan tilastollista mallia $f_Y(y;\theta)$, jossa parametri θ on reaalinen.

a) Mitä tarkoitetaan parametrin θ luottamusvälillä?

b) Miten määritellään parametrin θ uskottavuusväli?

c) Mikä approksimatiivinen yhteys on uskottavuusvälillä ja luottamusvälillä, kun luottamustasoksi on valittu 95 % ja malli oletetaan kyllin säännölliseksi?

Muistin tueksi

Jos satunnaismuuttuja Y » $P(\theta)$ (Poisson-jakauma), niin sen pistetodennäköisyysfunktio on $f(y;\theta) = \frac{1}{y!}\theta^y e^{\text{ i } \theta}$ $(y = 0, 1, ...)$. Lisäksi $EY = \theta$ ja $var(Y) = \theta$.

Tilastollisen päättelyn kurssi - kesätentti 9.8.2007

1. Havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat ovat $Y_1, ..., Y_n \sim B(\theta) \perp\!\!\!\perp$ eli $Y_i \in \{0, 1\}$ ja $P\{Y_i = 1\} = \theta$ ja $P\{Y_i = 0\} = 1 - \theta$ sekä $E(Y_i) = \theta$ ja $\mathrm{var}(Y_i) = \theta(1-\theta)$. Laske tämän mallin (i) pistemääräfunktio, (ii) havaittu informaatio ja (iii) Fisherin informaatio käyttäen ensiksi pelkästään pistemääräfunktiota ja sen jälkeen pelkästään havaittua informaatiota.

2. a) Tarkastellaan tilastollista mallia $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})$. Miten määritellään (ehdollisen jakauman käsitteeseen perustuen) parametrin $\boldsymbol{\theta}$ tyhjentävä tunnusluku? Kerro myös lyhyesti tyhjentävyyden käytännöllinen tulkinta.
b) Havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat $Y_1, ..., Y_n$ ovat riippumattomia ja noudattavat kukin jatkuvaa jakaumaa, jonka tiheysfunktio on

$$f(y; \theta) = \theta y^{\theta-1}, \quad 0 < y < 1,$$

jossa $\theta > 0$. Etsi parametrille θ yksiulotteinen tyhjentävä tunnusluku.

3. Erään elektronisen komponentin kestoaika noudattaa eksponenttijakaumaa odotusarvona μ. Tutkittaessa n komponenttia toisistaan riippumatta saatiin niiden kestoajoiksi $y_1, ..., y_n$ aikayksikköä. Johda huolellisesti perustellen (i) suurimman uskottavuuden estimaatti odotusarvolle μ ja (ii) todennäköisyydelle, että umpimähkään valitun komponentin kestoaika on vähintään y_0 aikayksikköä.

4. Tarkastellaan tilastollista mallia $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}; \theta)$, jossa θ on reaaliarvoinen parametri ja tavanomaiset säännöllisyysehdot ovat voimassa.
(i) Esitä Waldin testi hypoteesille H_0: $\theta = \theta_0$ vaihtoehtoa H_1: $\theta \neq \theta_0$ vastaan.
(ii) Muodosta kohdan (i) Waldin testiin perustuva approksimatiivinen 95 %:n luottamusväli parametrille θ.

Muistin tueksi

Jos satunnaismuuttuja Y noudattaa eksponenttijakaumaa parametrina $\lambda > 0$, niin sen tiheysfunktio on $f(y; \lambda) = \lambda e^{-\lambda y}$ ja kertymäfunktio on $F(y; \lambda) = 1 - e^{-\lambda y}$, $y > 0$. Lisäksi $E(Y) = 1/\lambda$ ja $\mathrm{var}(Y) = 1/\lambda^2$.

Jos Φ on $N(0, 1)$-jakauman kertymäfunktio, niin $\Phi(1.645) \approx 0.95$, $\Phi(1.96) \approx 0.975$, $\Phi(2.336) \approx 0.01$

Tilastollisen päättelyn kurssi - yleistentti 18.12.2007

1. Toistokokeessa suoritetaan n riippumatonta toistoa ja yksittäisen kokeen (toiston) onnistumistodennäköisyys on tuntematon θ. Satunnaismuuttuja Y_i saa arvon 1, jos i:s koe onnistuu ja arvon 0, jos se epäonnistuu, joten $P\{Y_i = 1\} = \theta$ ja $P\{Y_i = 0\} = 1 - \theta$. Muodosta tätä toistokoetta kuvaavan tilastollisen mallin lauseke. Johda sen jälkeen huolellisesti perustellen parametrin θ suurimman uskottavuuden estimaatti $\hat{\theta}$, kun havainnot ovat $y_1, ..., y_n$.

2. Oletetaan, että havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat ovat $Y_1, ..., Y_n \sim P(\mu) \perp\!\!\!\perp$. Perustele, että mille tahansa parametrin μ harhattomalle estimaattorille T on voimassa

$$var(T) \geq \mu/n.$$

Esitä parametrin μ momenttiestimaattori ja perustele miksi se on tai ei ole hyvä estimaattori tässä tapauksessa.

3. Olkoon $Y_1, ..., Y_n$ riippumattomia ja jokainen Y_i $(i = 1, ..., n)$ noudattaa jakaumaa, jonka tiheysfunktio on

$$f(y;\theta) = 2\theta y \exp\left(-\theta y^2\right), \quad y > 0,$$

jossa θ on positiivinen parametri.
a) Muodosta tilastollinen malli $f_{\mathbf{Y}}$ ja johda parametrin θ suurimman uskottavuuden estimaattori $\hat{\theta}$ sekä Fisherin informaatio $i(\theta)$.
b) Mitä normaalijakaumaa $\hat{\theta}$ approksimatiivisesti noudattaa, kun n on suuri?
c) Muodosta Waldin testiin eli yo normaaliapproksimaatioon perustuva approksimatiivinen 95 %:n luottamusväli parametrille θ, kun aineisto on $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)$.

4. Erään elektronisen komponentin kestoaika noudattaa eksponenttijakaumaa odotusarvona μ. Tutkittaessa n komponenttia toisistaan riippumatta saatiin niiden kestoajoiksi $y_1, ..., y_n$ aikayksikköä. Johda huolellisesti perustellen suurimman uskottavuuden estimaatit odotusarvolle μ ja todennäköisyydelle, että umpimähkään valitun komponentin kestoikä on vähintään y_0 aikayksikköä.

Muistin tueksi

Satunnaismuuttujan $Y \sim P(\mu)$ pistetodennäköisyysfunktio on $f(y;\mu) = \mu^y e^{-\mu}/y!$ $(y = 0, 1, ..., \mu > 0)$. Lisäksi $E(Y) = \mu$ ja $var(Y) = \mu$.

Jos satunnaismuuttuja Y noudattaa eksponenttijakaumaa parametrina λ (eli $Y \sim Exp(\lambda)$), niin sen tiheysfunktio on $f(y;\mu) = \lambda e^{-\lambda y}$ ja kertymäfunktio on $F(y;\mu) = 1 - e^{-\lambda y}$, $y > 0$. Lisäksi $E(Y) = 1/\lambda$ ja $\mathrm{var}(Y) = 1/\lambda^2$.

Jos Φ on $N(0,1)$-jakauman kertymäfunktio, niin $\Phi(1.645) \approx 0.95$, $\Phi(1.96) \approx 0.975$, $\Phi(2.336) \approx 0.01$

Tilastollisen päättelyn kurssi - yleistentti 24.1.2008

1. Havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat $Y_1, ..., Y_n$ ovat riippumattomia ja noudattavat kukin jatkuvaa jakaumaa, jonka tiheysfunktio on

$$f(y;\theta) = \theta y^{\theta-1}, \quad 0 < y < 1,$$

jossa θ on positiivinen parametri. Muodosta tämän mallin logaritminen uskottavuusfunktio $l(\theta; \mathbf{y})$ ja johda huolellisesti perustellen parametrin θ suurimman uskottavuuden estimaatti $\hat{\theta}$, kun aineisto on $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)$. Laske myös havaittu informaatio $j(\hat{\theta}; \mathbf{y})$.

2. Tilastollisen mallin parametri on $\boldsymbol{\theta}$ ja estimoitavana on sen reaalinen funktio eli muunnos $g(\boldsymbol{\theta})$. Selosta lyhyesti miten määritellään estimaattorin T (a) harhattomuus, (b) asymptoottinen harhattomuus ja (c) tarkentuvuus.
Oletetaan, että $t_1, ..., t_n$ ovat tunnettuja positiivisia reaalilukuja ja havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat ovat $Y_1, ..., Y_n \perp\!\!\!\perp$, jossa $Y_i \sim Exp(t_i/\theta)$. Parametrin θ estimointiin käytetään estimaattoria

$$T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i Y_i.$$

Näytä, että tämä estimaattori on harhaton ja laske sen varianssi. Onko se tarkentuva?

3. (i) Tarkastellaan tilastollista mallia $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})$. Miten määritellään ehdollisen jakauman avulla parametrin $\boldsymbol{\theta}$ tyhjentävä tunnusluku? Mikä tunnusluku on aina tyhjentävä (ns. triviaali tyhjentävä tunnusluku)?
(ii) Olkoon $Y_1, ..., Y_n$ riippumattomia ja jokainen Y_i $(i = 1, ..., n)$ noudattaa jakaumaa, jonka tiheysfunktio tai pistetodennäköisyysfunktio riippuu reaalisesta parametrista θ ja on muotoa

$$f_Y(y;\theta) = h(y)\, c(\theta) \exp(w(\theta)\, t(y)).$$

Etsi parametrille θ yksiulotteinen tyhjentävä tunnusluku.

4. Olkoot $Y_1, ..., Y_n \sim P(\mu) \perp\!\!\!\perp$ ja olkoon $\hat{\mu} = \overline{Y} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ parametrin μ suurimman uskottavuuden estimaattori.
a) Laske Fisherin informaatio $i(\mu)$.
b) Mitä normaalijakaumaa $\hat{\mu}$ approksimatiivisesti noudattaa, kun n on suuri?
c) Oletetaan, että havaintoja on $n = 50$ ja niiden keskiarvoksi saadaan $\bar{y} = 32$. Muodosta Waldin testiin (eli yo normaaliapproksimaatioon) perustuva approksimatiivinen 95%:n luottamusväli μ:lle.

Muistin tueksi

Satunnaismuuttujan $Y \sim Exp(\lambda)$ tiheysfunktio on $f(y;\lambda) = \lambda e^{-\lambda y}$, $y > 0$, $\lambda > 0$. Lisäksi $E(Y) = 1/\lambda$ ja $\mathrm{var}(Y) = 1/\lambda^2$.

Satunnaismuuttujan $Y \sim P(\mu)$ pistetodennäköisyysfunktio on $f(y;\mu) = \frac{1}{y!}\mu^y e^{-\mu}$ $(y = 0, 1, ...)$. Lisäksi $E(Y) = \mu$ ja $var(Y) = \mu$.

Jos Φ on $N(0,1)$-jakauman kertymäfunktio, niin $\Phi(1.645) \approx 0.95$, $\Phi(1.96) \approx 0.975$, $\Phi(2.336) \approx 0.01$

Tilastollisen päättelyn kurssi - loppukoe (27.2.2008, klo 13-15 A111)

1. Havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat ovat $Y_1, ..., Y_n \sim P(\mu)$ $\underline{\|}$. Muodosta tämän mallin log-uskottavuusfunktio ja johda huolellisesti perustellen parametrin μ suurimman uskottavuuden estimaatti $\hat{\mu}$, kun aineisto on $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)$. *(4 p.)*

2. Oletetaan, että satunnaismuuttujat $Y_1, ..., Y_n$ ovat riippumattomia ja noudattavat kukin jatkuvaa jakaumaa, jonka tiheysfunktio on

$$f(y; \theta) = \theta^{-2} y \exp(-y/\theta), \quad y > 0,$$

jossa θ on positiivinen parametri. Kysymyksessä on gammajakauman erikoistapaus. Integroimalla nähdään, että $E(Y_i) = 2\theta$ ja $\mathrm{var}(Y_i) = 2\theta^2$. Osoita, että mille tahansa parametrin θ harhattomalle estimaattorille T pätee

$$\mathrm{var}(T) \geq \theta^2/2n.$$

Esitä parametrin θ momenttiestimaattori ja perustele miksi se on tai ei ole hyvä estimaattori tässä tapauksessa. *(6 p.)*

3. a) Tilastollinen malli on $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})$. Testataan parametria $\boldsymbol{\theta}$ koskevaa nollahypoteesia $H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ testisuuretta $t = t(\mathbf{y})$ käyttäen. Määrittele huolellisesti tähän liittyvä p-arvo eli havaittu merkitsevyystaso.
b) Selosta lyhyesti p-arvoihin liittyvä valintakorjauksen käsite: missä tilanteessa valintakorjauksen suorittaminen on tarpeen ja miten se voidaan käytännössä tehdä. *(4 p.)*

4. Havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat ovat $Y_1, ..., Y_n \sim Exp(\lambda)$. Parametrin λ suurimman uskottavuuden estimaattori on tunnetusti $\hat{\lambda} = 1/\overline{Y}$, jossa $\overline{Y} = (Y_1 + \cdots + Y_n)/n$.
a) Laske Fisherin informaatio $i(\lambda)$.
b) Mitä normaalijakaumaa $\hat{\lambda}$ approksimatiivisesti noudattaa, kun n on suuri?
c) Oletetaan, että havaintoja on $n = 25$ ja niiden keskiarvoksi saadaan $\bar{y} = 5$. Muodosta Waldin testiin eli yo normaaliapproksimaatioon perustuva approksimatiivinen 95 %:n luottamusväli λ:lle. *(6 p.)*

Muistin tueksi

Satunnaismuuttujan $Y \sim P(\mu)$ pistetodennäköisyysfunktio on $f(y; \mu) = \frac{1}{y!}\mu^y e^{-\mu}$, $y = 0, 1, ..., \mu > 0$. Lisäksi $E(Y) = \mu$ ja $var(Y) = \mu$.

Satunnaismuuttujan $Y \sim Exp(\lambda)$ tiheysfunktio on $f(y; \lambda) = \lambda e^{-\lambda y}$, $y > 0, \lambda > 0$. Lisäksi $E(Y) = 1/\lambda$ ja $\mathrm{var}(Y) = 1/\lambda^2$.

Jos Φ on $N(0, 1)$-jakauman kertymäfunktio, niin $\Phi(1.645) \approx 0.95$, $\Phi(1.96) \approx 0.975$, $\Phi(2.336) \approx 0.01$

Ole hyvä ja vastaa kurssikyselyyn: http://mathstat.helsinki.fi/kurssit/kysely/

Tilastollisen päättelyn kurssi - yleistentti 04.03.2008

1. Havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat ovat $Y_1, ..., Y_n \sim P(\mu) \perp\!\!\!\perp$.

a) Johda huolellisesti perustellen parametrin μ suurimman uskottavuuden estimaattori.

b) Osoita, että parametrin μ suurimman uskottavuuden estimaattori on täystehokas.

2. Tilastollisen mallin parametri on $\boldsymbol{\theta}$ ja estimoitavana on sen reaalinen funktio eli muunnos $g(\boldsymbol{\theta})$. Selosta lyhyesti miten määritellään estimaattorin T

a) harhattomuus

b) asymptoottinen harhattomuus

c) tarkentuvuus.

Oletetaan, että $t_1, ..., t_n$ ovat tunnettuja positiivisia reaalilukuja ja havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat ovat $Y_1, ..., Y_n \perp\!\!\!\perp$, jossa $Y_i \sim Exp(t_i/\theta)$. Parametrin θ estimointiin käytetään estimaattoria

$$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} t_i Y_i.$$

Näytä, että tämä estimaattori on harhaton ja laske sen varianssi. Onko se tarkentuva?

3. a) Tarkastellaan tilastollista mallia $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})$. Miten määritellään (ehdollisen jakauman käsitteeseen perustuen) parametrin $\boldsymbol{\theta}$ tyhjentävä tunnusluku? Mikä tunnusluku on aina tyhjentävä (ns. triviaali tyhjentävä tunnusluku)?

b) Havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat $Y_1, ..., Y_n$ ovat riippumattomia ja noudattavat kukin jatkuvaa jakaumaa, jonka tiheysfunktio on

$$f(y; \theta) = \theta y^{\theta - 1}, \quad 0 < y < 1,$$

jossa $\theta > 0$. Etsi parametrille θ yksiulotteinen tyhjentävä tunnusluku.

4. Oletetaan, että havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat $Y_1, ..., Y_n$ ovat riippumattomia ja noudattavat kukin jatkuvaa jakaumaa, jonka tiheysfunktio on

$$f(y; \theta) = \theta^{-2} y \exp(-y/\theta), \quad y > 0,$$

jossa θ on positiivinen parametri. Kysymyksessä on gammajakauman erikoistapaus. Integroimalla nähdään, että $E(Y_i) = 2\theta$ ja $var(Y_i) = 2\theta^2$. Johda uskottavuusosamäärän testi, Waldin testi ja pistemäärätesti nollahypoteesille H_0: $\theta = \theta_0$ kaksisuuntaista vaihtoehtoa H_1: $\theta \neq \theta_0$ vastaan.

Muistin tueksi

Satunnaismuuttujan $Y \sim P(\mu)$ pistetodennäköisyysfunktio on $f(y; \mu) = \mu^y e^{-\mu}/y!$ $(y = 0, 1, ...)$. Lisäksi $E(Y) = \mu$ ja $var(Y) = \mu$.

Satunnaismuuttujan $Y \sim Exp(\lambda)$ tiheysfunktio on $f(y; \lambda) = \lambda e^{-\lambda y}$ $y > 0, \lambda > 0$. Lisäksi $E(Y) = 1/\lambda$ ja $\text{var}(Y) = 1/\lambda^2$.

Tilastollisen päättelyn kurssi - yleistentti 03.04.2008

1. Havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat ovat $Y_1, ..., Y_n \sim P(\theta)$ $\perp\!\!\!\perp$.

a) Johda parametrin θ suurimman uskottavuuden estimaattori.

b) Osoita, että parametrin θ suurimman uskottavuuden estimaattori on täystehokas.

2. a) Tarkastellaan tilastollista mallia $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})$. Miten määritellään ehdollisen jakauman avulla parametrin $\boldsymbol{\theta}$ tyhjentävä tunnusluku? Mikä tunnusluku on aina tyhjentävä (ns. triviaali tyhjentävä tunnusluku)?

b) Havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat $Y_1, ..., Y_n$ ovat riippumattomia ja noudattavat kukin jatkuvaa jakaumaa, jonka tiheysfunktio on

$$f(y; \theta) = \theta y^{\theta - 1}, \quad 0 < y < 1,$$

jossa $\theta > 0$. Etsi parametrille θ yksiulotteinen tyhjentävä tunnusluku.

3. Oletetaan, että havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat $Y_1, ..., Y_n$ ovat riippumattomia ja noudattavat kukin jatkuvaa jakaumaa, jonka tiheysfunktio on

$$f(y; \theta) = \theta^{-2} y \exp(-y/\theta), \quad y > 0,$$

jossa $\theta > 0$. Kysymyksessä on gammajakauman erikoistapaus. Integroimalla nähdään, että $E(Y_i) = 2\theta$ ja $var(Y_i) = 2\theta^2$. Johda uskottavuusosamäärätesti, Waldin testi ja pistemäärätesti nollahypoteesille H_0: $\theta = \theta_0$ kaksisuuntaista vaihtoehtoa H_1: $\theta \neq \theta_0$ vastaan.

4. Tarkastellaan tilastollista mallia $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}; \theta)$, jossa parametri θ on reaalinen.

a) Mitä tarkoitetaan parametrin θ luottamusvälillä?

b) Miten määritellään parametrin θ uskottavuusväli?

c) Mikä approksimatiivinen yhteys on uskottavuusvälillä ja luottamusvälillä, kun luottamustasoksi on valittu 95 % ja malli oletetaan kyllin säännölliseksi?

Muistin tueksi

Jos satunnaismuuttuja $Y \sim P(\theta)$ (Poisson-jakauma), niin sen pistetodennäköisyysfunktio on $f(y; \theta) = \frac{1}{y!}\theta^y e^{-\theta}$ $(y = 0, 1, ...)$. Lisäksi $EY = \theta$ ja $var(Y) = \theta$.

Tilastollisen päättelyn kurssi - keätentti 12.06.2008

1. Havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat ovat $Y_1, ..., Y_n \sim P(\mu)$ $\perp\!\!\!\perp$.

a) Johda huolellisesti perustellen parametrin μ suurimman uskottavuuden estimaattori.

b) Osoita, että parametrin μ suurimman uskottavuuden estimaattori on täystehokas.

2. Tilastollisen mallin parametri on $\boldsymbol{\theta}$ ja estimoitavana on sen reaalinen funktio eli muunnos $g(\boldsymbol{\theta})$.
Selosta lyhyesti miten määritellään estimaattorin T

a) harhattomuus

b) asymptoottinen harhattomuus

c) tarkentuvuus.

Oletetaan, että $t_1, ..., t_n$ ovat tunnettuja positiivisia reaalilukuja ja havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat ovat $Y_1, ..., Y_n$ $\perp\!\!\!\perp$, jossa $Y_i \sim Exp(t_i/\theta)$. Parametrin θ estimointiin käytetään estimaattoria

$$T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i Y_i.$$

Näytä, että tämä estimaattori on harhaton ja laske sen varianssi. Onko se tarkentuva?

3. a) Tarkastellaan tilastollista mallia $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})$. Miten määritellään (ehdollisen jakauman käsitteeseen perustuen) parametrin $\boldsymbol{\theta}$ tyhjentävä tunnusluku? Mikä tunnusluku on aina tyhjentävä (ns. triviaali tyhjentävä tunnusluku)?

b) Havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat $Y_1, ..., Y_n$ ovat riippumattomia ja noudattavat kukin jatkuvaa jakaumaa, jonka tiheysfunktio on

$$f(y; \theta) = \theta y^{\theta - 1}, \quad 0 < y < 1,$$

jossa $\theta > 0$. Etsi parametrille θ yksiulotteinen tyhjentävä tunnusluku.

4. Oletetaan, että havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat $Y_1, ..., Y_n$ ovat riippumattomia ja noudattavat kukin jatkuvaa jakaumaa, jonka tiheysfunktio on

$$f(y; \theta) = \theta^{-2} y \exp(-y/\theta), \quad y > 0,$$

jossa θ on positiivinen parametri. Kysymyksessä on gammajakauman erikoistapaus. Integroimalla nähdään, että $E(Y_i) = 2\theta$ ja $var(Y_i) = 2\theta^2$. Johda uskottavuusosamäärän testi, Waldin testi ja pistemäärätesti nollahypoteesille H_0: $\theta = \theta_0$ kaksisuuntaista vaihtoehtoa H_1: $\theta \neq \theta_0$ vastaan.

Muistin tueksi

Satunnaismuuttujan $Y \sim P(\mu)$ pistetodennäköisyysfunktio on $f(y; \mu) = \mu^y e^{-\mu}/y!$ $(y = 0, 1, ...)$. Lisäksi $E(Y) = \mu$ ja $var(Y) = \mu$.

Satunnaismuuttujan $Y \sim Exp(\lambda)$ tiheysfunktio on $f(y; \lambda) = \lambda e^{-\lambda y}$ $y > 0, \lambda > 0$. Lisäksi $E(Y) = 1/\lambda$ ja $\text{var}(Y) = 1/\lambda^2$.

Tilastollisen päättelyn kurssi - kesätentti 14.08.2008

1. Toistokokeessa suoritetaan n riippumatonta toistoa ja yksittäisen kokeen (toiston) onnistumistodennäköisyys on tuntematon θ. Satunnaismuuttuja Y_i saa arvon 1, jos i:s koe onnistuu ja arvon 0, jos se epäonnistuu, joten $P\{Y_i = 1\} = \theta$ ja $P\{Y_i = 0\} = 1 - \theta$. Muodosta tätä toistokoetta kuvaavan tilastollisen mallin lauseke. Johda sen jälkeen huolellisesti perustellen parametrin θ suurimman uskottavuuden estimaatti $\hat{\theta}$, kun havainnot ovat $y_1, ..., y_n$.

2. Oletetaan, että havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat ovat $Y_1, ..., Y_n \sim P(\mu)$ $\perp\!\!\!\perp$. Perustele, että mille tahansa parametrin μ harhattomalle estimaattorille T on voimassa

$$var(T) \geq \mu/n.$$

Esitä parametrin μ momenttiestimaattori ja perustele miksi se on tai ei ole hyvä estimaattori tässä tapauksessa.

3. Olkoon $Y_1, ..., Y_n$ riippumattomia ja jokainen Y_i $(i = 1, ..., n)$ noudattaa jakaumaa, jonka tiheysfunktio on

$$f(y; \theta) = 2\theta y \exp\left(-\theta y^2\right), \quad y > 0,$$

jossa θ on positiivinen parametri.
a) Muodosta tilastollinen malli $f_{\mathbf{Y}}$ ja johda parametrin θ suurimman uskottavuuden estimaattori $\hat{\theta}$ sekä Fisherin informaatio $i(\theta)$.
b) Mitä normaalijakaumaa $\hat{\theta}$ approksimatiivisesti noudattaa, kun n on suuri?
c) Muodosta Waldin testiin eli yo normaaliapproksimaatioon perustuva approksimatiivinen 95 %:n luottamusväli parametrille θ, kun aineisto on $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)$.

4. Erään elektronisen komponentin kestoaika noudattaa eksponenttijakaumaa odotusarvona μ. Tutkittaessa n komponenttia toisistaan riippumatta saatiin niiden kestoajoiksi $y_1, ..., y_n$ aikayksikköä. Johda huolellisesti perustellen suurimman uskottavuuden estimaatit odotusarvolle μ ja todennäköisyydelle, että umpimähkään valitun komponentin kestoikä on vähintään y_0 aikayksikköä.

Muistin tueksi

Satunnaismuuttujan $Y \sim P(\mu)$ pistetodennäköisyysfunktio on $f(y; \mu) = \mu^y e^{-\mu}/y!$ $(y = 0, 1, ..., \mu > 0)$. Lisäksi $E(Y) = \mu$ ja $var(Y) = \mu$.

Jos satunnaismuuttuja Y noudattaa eksponenttijakaumaa parametrina λ (eli $Y \sim Exp(\lambda)$), niin sen tiheysfunktio on $f(y; \lambda) = \lambda e^{-\lambda y}$ ja kertymäfunktio on $F(y; \lambda) = 1 - e^{-\lambda y}$, $y > 0$. Lisäksi $E(Y) = 1/\lambda$ ja $\text{var}(Y) = 1/\lambda^2$.

Jos Φ on $N(0, 1)$-jakauman kertymäfunktio, niin $\Phi(1.645) \approx 0.95$, $\Phi(1.96) \approx 0.975$, $\Phi(2.336) \approx 0.99$.

TILASTOLLINEN PÄÄTTELY, 10 OP (aineopinnot). Kirjallisuus: Pekka Nieminen ja Pentti Saikkonen: Tilastollisen päättelyn kurssi.

Yleistentti 21.10.2008

Kolme ensimmäistä kysymystä ovat kuuden pisteen arvoisia. Korkeimman arvosanan voi saada vastaamalla pelkästään niihin. Palauta kysymyspaperi.

1. Määrittele ja selitä
a) SU-estimaatti ja sen asymptoottiset ominaisuudet (riittävien säännöllisyysehtojen vallitessa).
b) uskottavuusyhtälö.
c) SU-estimaatin invarianssiominaisuus.
d) havaittu informaatio.
e) odotettu informaatio. Miten se liittyy SU-estimaattorin asymptoottisiin ominaisuuksiin (riittävien säännöllisyysehtojen vallitessa)?
f) parametrien ortogonaalisuus.

2. Määrittele ja selitä
a) estimaattorin harhattomuus.
b) estimaattorin keskineliövirhe. Miten se eroaa estimaattorin varianssista?
c) estimaattorin tarkentuvuus.
d) tyhjentävä tunnusluku ja faktorointikriteeri tyhjentävyydelle.

3. Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2) \perp$ (samoin normaalijakautuneita ja riippumattomia).
a) Mikä on yhteistiheysfunktio? Perustele huolellisesti.
b) Mikä on uskottavuusfunktio? Perustele huolellisesti.
c) Osoita, että Fisher-informaatio μ:lle on n/σ^2. Tulkitse tämä tulos sanoin.
d) Muodosta Raon testisuure hypoteesille H_0: $\mu = 0$.

4. Ylimääräinen yhden pisteen arvoinen lisätehtävä. Perustele, onko "p-arvo" vai eikö ole, todennäköisyys sille, että nollahypoteesi on tosi.

Aputuloksia:

- Normaalijakautuneen satunnaismuuttujan tiheysfunktio on $(2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp[-(y_i - \mu)^2/2\sigma^2]$ (ilmeisin merkinnöin).
- $\sum_{i=1}^{n} (y_i - \mu)^2 = (n-1)s^2 + n(\bar{y} - \mu)^2$, jossa $\bar{y} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} y_i$ ja $s^2 = (n-1)^{-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$.

TILASTOLLINEN PÄÄTTELY, 10 OP (aineopinnot). Kirjallisuus: Pekka Nieminen ja Pentti Saikkonen: Tilastollisen päättelyn kurssi.

Yleistentti 16.12.2008

Kolme ensimmäistä kysymystä ovat kuuden pisteen arvoisia. Korkeimman arvosanan voi saada vastaamalla pelkästään niihin. Palauta kysymyspaperi.

1. Määrittele ja selitä
a) SU-estimaatti ja sen asymptoottiset ominaisuudet (riittävien säännöllisyysehtojen vallitessa).
b) uskottavuusyhtälö.
c) SU-estimaatin invarianssiominaisuus.
d) havaittu informaatio.
e) odotettu informaatio. Miten se liittyy SU-estimaattorin asymptoottisiin ominaisuuksiin (riittävien säännöllisyysehtojen vallitessa)?
f) parametrien ortogonaalisuus.

2. Määrittele ja selitä
a) estimaattorin harhattomuus.
b) estimaattorin keskineliövirhe. Miten se eroaa estimaattorin varianssista?
c) estimaattorin tarkentuvuus.
d) tyhjentävä tunnusluku ja faktorointikriteeri tyhjentävyydelle.

3. Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2) \perp\!\!\!\perp$ (samoin normaalijakautuneita ja riippumattomia).
a) Mikä on yhteistiheysfunktio? Perustele huolellisesti.
b) Mikä on uskottavuusfunktio? Perustele huolellisesti.
c) Osoita, että Fisher-informaatio μ:lle on n/σ^2. Tulkitse tämä tulos sanoin.
d) Muodosta Raon testisuure hypoteesille H_0: $\mu = 0$.

4. Joululahja eli ylimääräinen yhden pisteen arvoinen lisätehtävä! Nordean mainosesitteessä Säästämisen uutiset (marraskuu 2008) selitetään korrelaation käsitettä näin:

Korrelaatiolla tarkoitetaan kahden eri tekijän kehitystä toisiinsa nähden. Korrelaatio(kerroin) vaihtelee lukujen +1 ja −1 välillä. Kun korrelaatio on yksi, kahden osakemarkkinan tuotot kehittyvät samalla tavoin, eli tuotot nousevat ja laskevat yhtä paljon samaan aikaan. Kun korrelaatio on miinus yksi, tuotot kehittyvät toistensa peilikuvina, eli toisen markkinan tuotto nousee saman verran kuin toisen laskee. Kun korrelaatio on nolla, tuottojen välillä ei voida havaita mitään vastaavuutta.

Onko korrelaation selitys hyvä? Perustele.

Aputuloksia:

- Normaalijakautuneen satunnaismuuttujan tiheysfunktio on $(2\pi\sigma^2)^{-1/2}\exp\{-(y_i-\mu)^2/2\sigma^2\}$ (ilmeisin merkinnöin).
- $\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2 = (n-1)s^2 + n(\bar{y}-\mu)^2$, jossa $\bar{y} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} y_i$ ja $s^2 = (n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$.

Oikein Hyvää ja Rauhaisaa Joulua!

TILASTOLLINEN PÄÄTTELY, 10 OP (aineopinnot) Kirjallisuus: Pekka Nieminen ja Pentti Saikkonen: Tilastollisen päättelyn kurssi

Yleistentti 22.1.2009

Kolme ensimmäistä kysymystä ovat kuuden pisteen arvoisia. Korkeimman arvosanan voi saada vastaamalla pelkästään niihin. Kahdessa ensimmäisessä kysymyksessä oleta, että mallin parametri on yksiulotteinen. Palauta kysymyspaperi (kiitos!).

1. Määrittele ja selitä huolellisesti
a) SU-estimaattori ja sen asymptoottiset ($n \longrightarrow \infty$) ominaisuudet (mm. jakauma: riittävien säännöllisyysehtojen vallitessa, joita ei tarvitse nimetä).
b) SU-estimaattorin invarianssiominaisuus.
c) havaittu informaatio.
d) odotettu eli Fisher-informaatio. Miten se eroaa havaitusta informaatiosta tulkinnallisesti? Miten se liittyy SU-estimaattorin asymptoottisiin ominaisuuksiin (riittävien säännöllisyysehtojen vallitessa, joita ei tarvitse nimetä)?

2. Merkitään parametrin $\theta \in \Omega$ estimaattoria T:llä. Määrittele ja selitä huolellisesti
a) estimaattorin T harhattomuus.
b) estimaattorin T keskineliövirhe. Miten se riippuu estimaattorin varianssista? Johda tämä tulos.
c) estimaattorin T tarkentuvuus.
d) tyhjentävä tunnusluku ja faktorointikriteeri tyhjentävyydelle.

3. Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ $\perp\!\!\!\perp$ (samoin normaalijakautuneita ja riippumattomia; $\sigma > 0$).
a) Mikä on havaintojen yhteistiheysfunktio? Perustele huolellisesti.
b) Mikä on uskottavuusfunktio? Perustele huolellisesti.
c) Osoita, että odotettu eli Fisher-informaatio μ:lle on n/σ^2. Tulkitse tämä tulos sanoin.
d) Muodosta Raon testisuure hypoteesille H_0: $\mu = 0$.

4. Ylimääräinen yhden pisteen arvoinen lisätehtävä. Perustele, onko "p-arvo" vai eikö ole, todennäköisyys sille, että nollahypoteesi on tosi.

Aputuloksia:

- Normaalijakautuneen satunnaismuuttujan tiheysfunktio on $(2\pi\sigma^2)^{-1/2}\exp(-(y_i - \mu)^2/2\sigma^2)$ (ilmeisin merkinnöin).
- $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu)^2 = (n-1)s^2 + n(\bar{y} - \mu)^2$,
jossa $\bar{y} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} y_i$ ja $s^2 = (n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$.

TILASTOLLINEN PÄÄTTELY, 10 OP (aineopinnot). Kirjallisuus: Pekka Nieminen ja Pentti Saikkonen: Tilastollisen päättelyn kurssi.

Yleistentti 3.3.2009

Kahdessa ensimmäisessä kysymyksessä oleta, että mallin parametri on yksiulotteinen. Palauta kysymyspaperi (kiitos!).

1. Määrittele ja selitä huolellisesti
a) SU-estimaattori ja sen asymptoottiset ($n \longrightarrow \infty$) ominaisuudet (mm. jakauma; riittävien säännöllisyysehtojen vallitessa, joita ei tarvitse nimetä).
b) SU-estimaattorin invarianssiominaisuus.
c) havaittu informaatio.
d) odotettu eli Fisher-informaatio. Miten se eroaa havaitusta informaatiosta tulkinnallisesti? Miten se liittyy SU-estimaattorin asymptoottisiin ominaisuuksiin (riittävien säännöllisyysehtojen vallitessa, joita ei tarvitse nimetä)?

2. Olkoon T parametrin $\theta \in \Omega$ (yksiulotteinen) harhaton estimaattori.
a) Esitä, ja selitä sanoin, informaatioepäyhtälö. Miten se liittyy SU-estimaattorin ominaisuuksiin?
b) Määrittele, ja selitä sanoin, estimaattorin T tehokkuus. Millainen estimaattori on täystehokas? Onko täystehokas estimaattori aina olemassa? Saat lisäpisteen, jos osaat vastata perustellusti oikein tähän kysymykseen: Milloin ainakin SU-estimaattori on täystehokas?

3. Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ $\perp\!\!\!\perp$ (samoin normaalijakautuneita ja riippumattomia; $\sigma > 0$).
a) Mikä on havaintojen yhteistiheysfunktio? Perustele huolellisesti.
b) Mikä on uskottavuusfunktio? Perustele huolellisesti.
c) Osoita, että odotettu eli Fisher-informaatio μ:lle on n/σ^2. Tulkitse tämä tulos sanoin.
d) Muodosta Raon testisuure hypoteesille H_0: $\mu = 0$.

TILASTOLLINEN PÄÄTTELY, 10 OP (aineopinnot). Kirjallisuus: Pekka Nieminen ja Pentti Saikkonen: Tilastollisen päättelyn kurssi.

Yleistentti 2.4.2009

Kysymykset ovat kaikki samanarvoisia. Kahdessa ensimmäisessä kysymyksessä oleta, että mallin parametri on yksiulotteinen. Luentomonisteessa esitettyjen säännöllisyysehtojen oletetaan pätevän. Palauta kysymyspaperi (kiitos!).

1. Määrittele ja selitä huolellisesti
a) SU-estimaattori ja sen asymptoottiset ($n \longrightarrow \infty$) ominaisuudet (mm. jakauma).
b) SU-estimaattorin invarianssiominaisuus.
c) Esitä, ja selitä sanoin, informaatioepäyhtälö. Miten se liittyy SU-estimaattorin ominaisuuksiin?
d) Määrittele, ja selitä sanoin, estimaattorin T tehokkuus. Millainen estimaattori on täystehokas? Onko täystehokas estimaattori aina olemassa? Milloin ainakin SU-estimaattori on täystehokas?

2. Merkitään parametrin $\theta \in \Omega$ estimaattoria T:llä. Määrittele ja selitä huolellisesti
a) estimaattorin T harhattomuus ja keskineliövirhe. Miten keskineliövirhe riippuu estimaattorin varianssista? Johda tämä tulos.
b) tyhjentävä tunnusluku ja faktorointikriteeri tyhjentävyydelle.
c) Neyman–Pearson apulause.
d) luottamusväli (sen frekventistinen tulkinta).

3. Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ $\perp\!\!\!\perp$ (samoin normaalijakautuneita ja riippumattomia). Parametreille pätee $\mu \in \mathbb{R}$ ja $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$.
a) Mikä on havaintojen yhteistiheysfunktio? Perustele huolellisesti.
b) Mikä on uskottavuusfunktio? Perustele huolellisesti.
c) Johda odotettu eli Fisher-informaatio odotusarvolle μ. Tulkitse tämä tulos sanoin. Miten odotettu informaatio liittyy — vai liittyykö lainkaan — μ:n SU-estimaattorin varianssiin?
d) Muodosta Raon testisuure hypoteesille H_0: $\mu = 0$.

Aputuloksia:

- Normaalijakautuneen satunnaismuuttujan tiheysfunktio on $(2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp[-(y_i - \mu)^2/2\sigma^2]$ (ilmeisin merkinnöin).
- $\sum_{i=1}^{n} (y_i - \mu)^2 = (n-1)s^2 + n(\bar{y} - \mu)^2$, jossa $\bar{y} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} y_i$ ja $s^2 = (n-1)^{-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$.

TILASTOLLINEN PÄÄTTELY, 10 OP (aineopinnot). Kirjallisuus: Pekka Nieminen ja Pentti Saikkonen: Tilastollisen päättelyn kurssi.

Yleistentti 12.5.2009

Kysymykset ovat kaikki samanarvoisia. Luentomonisteessa esitettyjen säännöllisyysehtojen oletetaan pätevän. Palauta kysymyspaperi ja taulukot (kiitos!).

1. Merkitään (yksiulotteisen) parametrin $\theta \in \Omega$ estimaattoria T:llä. Määrittele ja selitä huolellisesti
a) estimaattorin T harhattomuus.
b) estimaattorin T keskineliövirhe. Miten se riippuu estimaattorin varianssista? Johda tämä tulos.
c) estimaattorin T tarkentuvuus.
d) tyhjentävä tunnusluku ja faktorointikriteeri tyhjentävyydelle.

2. Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n \sim \mathsf{N}(\mu_0, \sigma^2)$ $\perp\!\!\!\perp$ (samoin normaalijakautuneita ja riippumattomia). Jakauman odotusarvo (μ_0) on tunnettu, mutta sen keskihajonta ($\sigma > 0$) on tuntematon.
a) Mikä on havaintojen (n kappaletta) yhteistiheysfunktio? Esitä kaava, ja perustele huolellisesti.
b) Johda SU-estimaattori $\hat{\sigma}$:lle eli keskihajonnalle σ. Huom! Tehtävässä kysytään σ:n SU-estimaattoria eikä σ^2:n SU-estimaattoria. Tarkista, että olet löytänyt uskottavuusfunktion (paikallisen) maksimin.
c) Johda odotettu eli Fisher-informaatio $i(\sigma)$ keskihajonnalle σ. (Vihje: Laske $i(\sigma)$ kaavalla, joka on monisteen mukaan ylipäänsä helpommin laskettavissa. Jos aikaa jää, tarkista tuloksesi laskemalla $i(\sigma)$ huomattavasti työläämmällä toisella kaavalla.)
d) Mikä on SU-estimaattorin $\hat{\sigma}$ approksimatiivinen jakauma suurilla havaintomäärillä? Vaihtoehtoisesti vastaa, mikä on sopivasti normeeratun SU-estimaattorin $\hat{\sigma}$ asymptoottinen jakauma ja mikä on sopiva normeeraus. Tulkitse esittämäsi kaava intuitiivisesti.

3. Olkoon parametri $\theta \in \Omega$ yksiulotteinen. Määrittele ja selitä huolellisesti kaavoin ja sanoin
a) testin havaittu merkitsevyystaso (p).
b) uskottavuusosamäärä-, Waldin ja Raon testisuureet ja niiden käyttö (jakauma, johon verrataan ja perustelu sille).
c) luottamusväli (sen frekventistinen tulkinta).
d) perustelu paljon käytetylle luottamusvälille $\hat{\theta} \pm 2 \times s.e.(\hat{\theta})$ (monisteen merkinnöin).

4. Tutkitaan eksponenttijakautuneita riippumattomia satunnaismuuttujia $Y_1, \ldots, Y_n \sim \mathsf{Exp}(1/\mu)$. Testataan nollahypoteesia $H_0 : \mu = \mu_0$, jossa $\mu_0 > 0$.
a) Muodosta uskottavuusosamäärä-, Waldin ja Raon testisuureet.
b) Olkoot otoskoko $n = 50$ ja $\bar{y} = 800$. Testaa mainituilla testisuureilla, onko syytä hylätä nollahypoteesia $H_0 : \mu = 1000$ merkitsevyystasolla $0,05$ (kaksisuuntainen testi).

Aputuloksia (kaikkia ei välttämättä tarvita):

- Normaalijakautuneen satunnaismuuttujan $Y \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ tiheysfunktio on $(2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp[-(y_i - \mu)^2/2\sigma^2]$ (ilmeisin merkinnöin).
- Normaalijakaumaa $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ noudattavan satunnaismuuttujan Y neljäs keskusmomentti $\mathsf{E}(Y - \mu)^4$ on $3\sigma^4$.
- $(\sum_{i=1}^n y_i)^2 = (\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n y_i y_j)^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n y_i y_j$.
- $\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n 1 = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = n(n-1)/2$.
- Eksponenttijakautuneen $(\mathsf{Exp}(1/\mu))$ satunnaismuuttujan Y tiheysfunktio on $(1/\mu) \exp(-y/\mu)$ (monisteen s. 3).
- Riippumattomien eksponenttijakautuneiden $(\mathsf{Exp}(1/\mu))$ havaintojen tilanteessa SU-estimaatttori μ:lle on $\bar{y}$, jossa $\bar{y} = n^{-1} \sum_{i=1}^n y_i$ (monisteen s. 16) ja Fisher-informaatio $i(\mu) = n/\mu^2$ (monisteen s. 70).
- Oheiset jakaumataulukot.

TILASTOLLINEN PÄÄTTELY, 10 OP (aineopinnot). Kirjallisuus: Pekka Nieminen ja Pentti Saikkonen: Tilastollisen päättelyn kurssi.

Yleistentti 11.6.2009

Kysymykset ovat kaikki samanarvoisia. Kahdessa ensimmäisessä kysymyksessä oleta, että mallin parametri on yksiulotteinen. Monisteessa esitettyjen säännöllisyysehtojen oletetaan pätevän. Palauta kysymyspaperi (kiitos!).

1. Määrittele ja selitä huolellisesti
a) SU-estimaattori ja sen asymptoottiset ($n \longrightarrow \infty$) ominaisuudet (mm. jakauma).
b) SU-estimaattorin invarianssiominaisuus.
c) Esitä, ja selitä sanoin, informaatioepäyhtälö. Miten se liittyy SU-estimaattorin ominaisuuksiin?
d) Määrittele, ja selitä sanoin, estimaattorin T tehokkuus. Millainen estimaattori on täystehokas? Onko täystehokas estimaattori aina olemassa? Milloin ainakin SU-estimaattori on täystehokas?

2. Merkitään parametrin $\theta \in \Omega$ estimaattoria T:llä. Määrittele ja selitä huolellisesti
a) estimaattorin T harhattomuus ja keskineliövirhe. Miten keskineliövirhe riippuu estimaattorin varianssista? Johda tämä tulos.
b) tyhjentävä tunnusluku ja faktorointikriteeri tyhjentävyydelle.
c) Neyman–Pearson apulause.
d) luottamusväli (sen frekventistinen tulkinta).

3. Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ $\perp\!\!\!\perp$ (samoin normaalijakautuneita ja riippumattomia). Parametreille pätee $\mu \in \mathbb{R}$ ja $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$.
a) Mikä on havaintojen yhteistiheysfunktio? Perustele huolellisesti.
b) Mikä on uskottavuusfunktio? Perustele huolellisesti.
c) Johda odotettu eli Fisher-informaatio odotusarvolle μ. Tulkitse tämä tulos sanoin. Miten odotettu informaatio liittyy — vai liittyykö lainkaan — μ:n SU-estimaattorin varianssiin?
d) Muodosta Raon testisuure hypoteesille H_0: $\mu = 0$.

Aputulos: Normaalijakautuneen satunnaismuuttujan tiheysfunktio on $(2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp[-(y_i - \mu)^2/2\sigma^2]$ (ilmeisin merkinnöin).

Tenttien korjaaminen saattaa viedä tavallista pidemmän ajan kesällä. Oikein hyvää ja aurinkoista kesää tilastotieteen ja muun kesäpuuhailun merkeissä!