

## Tilastollisen päättelyn kurssi — Loppukoe 16. 11. 2006

1. Toistokokeessa suoritetaan  $n$  riippumatonta toistoa ja yksittäisen kokeen (toiston) onnistumistodennäköisyys on tuntematon  $\theta$ . Satunnaismuuttuja  $Y_i$  saa arvon 1, jos  $i$ :s koe onnistui, ja arvon 0, jos se epäonnistui, joten  $P(Y_i = 1) = \theta$  ja  $P(Y_i = 0) = 1 - \theta$ . Muodosta toistokoetta kuvaavan tilastollisen mallin lauseke ja johda huolellisesti perustelujen suurimman uskottavuuden estimaatti  $\hat{\theta}$ , kun havainnot ovat  $y_1, \dots, y_n$ . Ilmoita myös havaittu informaatio  $j(\hat{\theta}; \mathbf{y})$ .
2. Tilastollisen mallin parametri on  $\theta$ , ja estimoitavana on sen reaalinen funktio eli muunnos  $g(\theta)$ . Selosta lyhyesti, miten määritellään estimaattorin  $T$  a) harhattomuus, b) keskineliövirhe, c) tarkentuvuus.
3. a) Tarkastellaan tilastollista mallia  $f_Y(\mathbf{y}; \theta)$ . Miten määritellään ehdollisen jakauman avulla parametrin  $\theta$  tyhjentävä tunnusluku? Mikä tunnusluku on aina tyhjentävä (ns. triviaali tyhjentävä tunnusluku)?  
 b) Havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat  $Y_1, \dots, Y_n$  ovat riippumattomia ja noudattavat kukin jatkuvaa jakaumaa, jonka tiheysfunktio on

$$f(y; \lambda) = 2\lambda y \exp(-\lambda y^2), \quad y > 0,$$

ja jossa  $\lambda > 0$ . Etsi parametrille  $\lambda$  yksiulotteinen tyhjentävä tunnusluku.

4. Diskreetin satunnaismuuttujan  $Y$  arvojoukko on  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ , ja sen jakauma riippuu parametrista  $\theta$ , jolla on kolme mahdollista arvoa: 1, 2 ja 3. Vastaavat pistetodennäköisyydet on lueteltu alla.

$y$	0	1	2	3	4
$f_Y(y; 1)$	.03	.02	.05	.80	.10
$f_Y(y; 2)$	.05	.05	.80	.10	.00
$f_Y(y; 3)$	.60	.38	.02	.00	.00

Halutaan testata hypoteesia  $H_0: \theta = 1$  vastaan  $H_1: \theta = 3$  merkitsevyydellä 0.05. Ilmoita voimakkaimman testin kriittinen alue. Muodosta myös sen voimafunktio koko parametriavaruudessa.

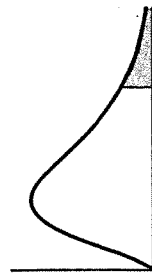
5. Eräässä tienristeyksessä on pitkällä aikavälillä sattunut keskimäärin 6.6 onnettomuutta kuukaudessa. Risteykseen asennetaan liikennevalot. Sitä seuraavan 12 kuukauden aikana sattuu yhteensä 60 onnettomuutta. Testaa joko uskottavuusosamäärän testiä tai Raon testiä ja p-arvon  $\chi^2$ -approksimaatiota käyttämällä, voidaanko valojen asentamisen katsota vaikuttaneen onnettomuuksien määrään. Oletetaan, että onnettomuuksien lukumäärä kuukaudessa on Poisson-jakautunut.

### Muistin tueksi:

Muuttujan  $Y \sim P(\mu)$  pistetodennäköisyysfunktio on  $f(y; \mu) = e^{-\mu} \mu^y / y!$ ,  $y = 0, 1, 2, \dots$ , ja  $E(Y) = \mu$ ,  $\text{var}(Y) = \mu$ .

Kääntöpuolella on  $\chi^2$ -jakauman taulukko.

TABLE 3 Cutoff points for the chi squared distribution, right-hand tail probabilities



df	.9995	.999	.9975	.995	.990	.975	.950	.900	.750	.500
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.10	0.45
2	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	0.58	1.39
3	0.02	0.02	0.04	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	1.21	2.37
4	0.06	0.09	0.14	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	1.92	3.36
5	0.16	0.21	0.31	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	2.67	4.35
6	0.30	0.38	0.53	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35
7	0.48	0.60	0.79	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35
8	0.71	0.86	1.10	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34
9	0.97	1.15	1.45	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34
10	1.26	1.48	1.83	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34
11	1.59	1.83	2.23	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.34
12	1.93	2.21	2.66	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.34
13	2.31	2.62	3.11	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.34
14	2.70	3.04	3.58	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.17	13.34
15	3.11	3.48	4.07	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.04	14.34
16	3.54	3.94	4.57	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.91	15.34
17	3.98	4.42	5.09	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	12.79	16.34
18	4.44	4.90	5.62	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	13.68	17.34
19	4.91	5.41	6.17	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	14.56	18.34
20	5.40	5.92	6.72	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	15.45	19.34
21	5.90	6.45	7.29	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	16.34	20.34
22	6.40	6.98	7.86	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	17.24	21.34
23	6.92	7.53	8.45	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	18.14	22.34
24	7.45	8.08	9.04	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	19.04	23.34
25	7.99	8.65	9.65	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	19.94	24.34
26	8.54	9.22	10.26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	20.84	25.34
27	9.09	9.80	10.87	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	21.75	26.34
28	9.66	10.39	11.50	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	22.66	27.34
29	10.23	10.99	12.13	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	23.57	28.34
30	10.80	11.59	12.76	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	24.48	29.34
40	16.91	17.92	19.42	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	33.66	39.34
50	23.46	24.67	26.46	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	42.94	49.33
60	30.34	31.74	33.79	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	52.29	59.33
80	44.79	46.52	49.04	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	71.14	79.33
100	59.90	61.92	64.86	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	90.13	99.33

TABLE 3 (continued)

df	.250	.200	.150	.100	.050	.025	.020	.010	.005	.0025	.001	.0005
1	1.32	1.64	2.07	2.71	3.84	5.02	5.41	6.63	7.88	9.14	10.83	12.12
2	2.77	3.22	3.79	4.61	5.99	7.38	7.82	9.21	10.60	11.98	13.82	15.20
3	4.11	4.64	5.32	6.25	7.81	9.35	9.84	11.34	12.84	14.32	16.27	17.73
4	5.39	5.99	6.74	7.78	9.49	11.14	11.67	13.28	14.86	16.42	18.47	20.00
5	6.63	7.29	8.12	9.24	11.07	12.83	13.39	15.09	16.75	18.39	20.51	22.11
6	7.84	8.56	9.45	10.64	12.59	14.45	15.03	16.81	18.55	20.25	22.46	24.10
7	9.04	9.80	10.75	12.02	14.07	16.01	16.62	18.48	20.28	22.04	24.32	26.02
8	10.22	11.03	12.03	13.36	15.51	17.53	18.17	20.09	21.95	23.77	26.12	27.87
9	11.39	12.24	13.29	14.68	16.92	19.02	19.68	21.67	23.59	25.46	27.88	29.67
10	12.55	13.44	14.53	15.99	18.31	20.48	21.16	23.21	25.19	27.11	29.59	31.42
11	13.70	14.63	15.77	17.28	19.68	21.92	22.62	24.72	26.76	28.73	31.26	33.14
12	14.85	15.81	16.99	18.55	21.03	23.34	24.05	26.22	28.30	30.32	32.91	34.82
13	15.98	16.98	18.20	19.81	22.36	24.74	25.47	27.69	29.82	31.88	34.53	36.48
14	17.12	18.15	19.41	21.06	23.68	26.12	26.87	29.14	31.32	33.43	36.12	38.11
15	18.25	19.31	20.60	22.31	25.00	27.49	28.26	30.58	32.80	34.95	37.70	39.72
16	19.37	20.47	21.79	23.54	26.30	28.85	29.63	32.00	34.27	36.46	39.25	41.31
17	20.49	21.61	22.98	24.77	27.59	30.19	31.00	33.41	35.72	37.95	40.79	42.88
18	21.60	22.76	24.16	25.99	28.87	31.53	32.35	34.81	37.16	39.42	42.31	44.43
19	22.72	23.90	25.33	27.20	30.14	32.85	33.69	36.19	38.58	40.88	43.82	45.97
20	23.83	25.04	26.50	28.41	31.41	34.17	35.02	37.57	40.00	42.34	45.31	47.50
21	24.93	26.17	27.66	29.62	32.67	35.48	36.34	38.93	41.40	43.78	46.80	49.01
22	26.04	27.30	28.82	30.81	33.92	36.78	37.66	40.29	42.80	45.20	48.27	50.51
23	27.14	28.43	29.98	32.01	35.17	38.08	38.97	41.64	44.18	46.62	49.73	52.00
24	28.24	29.55	31.13	33.20	36.42	39.36	40.27	42.98	45.56	48.03	51.18	53.48
25	29.34	30.68	32.28	34.38	37.65	40.65	41.57	44.31	46.93	49.44	52.62	54.95
26	30.43	31.79	33.43	35.56	38.89	41.92	42.86	45.64	48.29	50.83	54.05	56.41
27	31.53	32.91	34.57	36.74	40.11	43.19	44.14	46.96	49.64	52.22	55.48	57.86
28	32.62	34.03	35.71	37.92	41.34	44.46	45.42	48.28	50.99	53.59	56.89	59.30
29	33.71	35.14	36.85	39.09	42.56	45.72	46.69	49.59	52.34	54.97	58.30	60.73
30	34.80	36.25	37.99	40.26	43.77	46.98	47.96	50.89	53.67	56.33	59.70	62.16
40	45.62	47.27	49.24	51.81	55.76	59.34	60.44	63.69	66.77	69.70	73.40	76.09
50	56.33	58.16	60.35	63.17	67.50	71.42	72.61	76.15	79.49	82.66	86.66	89.56
60	66.98	68.97	71.34	74.40	79.08	83.30	84.58	88.38	91.95	95.34	99.61	102.7
80	88.13	90.41	93.11	96.58	101.9	106.6	108.1	112.3	116.3	120.1	124.8	128.3
100	109.1	111.7	114.7	118.5	124.3	129.6	131.1	135.8	140.2	144.3	149.4	153.2

## Tilastollisen päättelyn kurssi - 1. kurssikoe (18.12.2006, klo 13-15 A111)

1. Oletetaan, että satunnaismuuttujat  $Y_1, \dots, Y_n$  ovat riippumattomia ja noudattavat kukin jatkuvaa jakaumaa, jonka tiheysfunktio on

$$f(y; \theta) = 2\theta y \exp(-\theta y^2), \quad y > 0,$$

jossa  $\theta$  on positiivinen parametri. Muodosta tämän mallin log-uskottavuusfunktio ja johda huolellisesti perustellen parametrin  $\theta$  suurimman uskottavuuden estimaatti  $\hat{\theta}$ , kun aineisto on  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ . (4 p.)

2. Olkoot  $Y_1, \dots, Y_n \sim N(\mu, \sigma_0^2)$ , jossa  $\mu \in \mathbb{R}$  on tuntematon ja  $\sigma_0^2 > 0$  tunnettu. Laske tämän mallin (a) pistemääräfunktio, (b) havaittu informaatio ja (c) Fisherin informaatio käyttäen ensiksi pelkästään havaittua informaatiota ja sen jälkeen pelkästään pistemääräfunktiota. (5 p.)

3. Oletetaan, että satunnaismuuttujat  $Y_1, \dots, Y_n$  ovat riippumattomia ja noudattavat kukin jatkuvaa jakaumaa, jonka tiheysfunktio on

$$f(y; \theta) = \theta^{-2} y \exp(-y/\theta), \quad y > 0,$$

jossa  $\theta$  on positiivinen parametri. Kysymyksessä on gammajakauman erikoistapaus. Integroimalla nähdään, että  $E(Y_i) = 2\theta$  ja  $\text{var}(Y_i) = 2\theta^2$ . Osoita, että mille tahansa parametrin  $\theta$  harhattomalle estimaattorille  $\tilde{\theta}$  pätee

$$\text{var}(\tilde{\theta}) \geq \theta^2/2n.$$

Esitä parametrin  $\theta$  momenttiestimaattori ja perustele miksi se on tai ei ole hyvä estimaattori tässä tapauksessa. (6 p.)

4. Erään elektronisen komponentin kesto-aika noudattaa eksponenttijakaumaa odotusarvona  $\mu$ . Tutkittaessa  $n$  komponenttia toisistaan riippumatta saatiin niiden kestoajoiksi  $y_1, \dots, y_n$  aikayksikköä. Johda huolellisesti perustellen suurimman uskottavuuden estimaatit odotusarvolle  $\mu$  ja todennäköisyydelle, että umpimähkään valitun komponentin kestoikä on vähintään  $y_0$  aikayksikköä. (5 p.)

### Muistin tueksi

Satunnaismuuttujan  $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$  tiheysfunktio on  $f(y; \mu, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\{-(y-\mu)^2/2\sigma^2\}$  ja  $E(Y) = \mu$ ,  $\text{var}(Y) = \sigma^2$ .

Jos satunnaismuuttuja  $Y$  noudattaa eksponenttijakaumaa parametrina  $\lambda$  (eli  $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$ ), niin sen tiheysfunktio on  $f(y; \mu) = \lambda e^{-\lambda y}$  ja kertymäfunktio on  $F(y; \mu) = 1 - e^{-\lambda y}$ ,  $y > 0$ . Lisäksi  $E(Y) = 1/\lambda$  ja  $\text{var}(Y) = 1/\lambda^2$ .

**Huom.:** Kurssin hyväksytyyn suoritukseen vaaditaan, että molemmista kurssikoikeista saa vähintään 7 pistettä.

## Tilastollisen päättelyn kurssi - 2. kurssikoe (1.3.2007, klo 13-15 A111)

1. Havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat  $Y_1, \dots, Y_n$  ovat riippumattomia ja noudattavat kukin jatkuvaa jakaumaa, jonka tiheysfunktio on

$$f(y; \theta) = 2\theta y \exp(-\theta y^2), \quad y > 0,$$

jossa  $\theta$  on positiivinen parametri. Etsi parametrille  $\theta$  yksiulotteinen tyhjentävä tunnusluku. (4 p.)

2. Tilastollinen malli on  $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}; \theta)$ . Testataan parametria  $\theta$  koskevaa nollahypoteesia  $H_0 : \theta = \theta_0$  testisuureta  $t = t(\mathbf{y})$  käyttäen. Määrittele huolellisesti tähän liittyvä  $p$ -arvo eli havaittu merkitsevyystaso. Oletetaan, että on tehtävä päätös  $H_0$ :n hyväksymisestä tai hylkäämisestä. Miten tällöin menetellään? Millaiset virhemahdollisuudet tässä on? (4 p.)

3. Diskreetin satunnaismuuttujan  $Y$  arvojoukko on  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  ja sen jakauma riippuu parametrista  $\theta$ , jolla on kolme mahdollista arvoa: 1, 2 ja 3. Vastaavat pistetodennäköisyydet ovat

$y$	0	1	2	3	4
$f(y; 1)$	.03	.02	.05	.80	.10
$f(y; 2)$	.05	.05	.80	.10	.00
$f(y; 3)$	.60	.38	.02	.00	.00

Halutaan testata hypoteesia  $H_0 : \theta = 1$  vaihtoehtoa  $H_1 : \theta = 3$  vastaan merkitsevyystasolla 0.05. Ilmoita voimakkaimman testin kriittinen alue. Muodosta myös sen voimafunktio. (6 p.)

4. Olkoot  $Y_1, \dots, Y_n \sim P(\mu)$  ja olkoon  $\hat{\mu} = \bar{Y} = n^{-1} \sum_{i=1}^n Y_i$  parametrin  $\mu$  suurimman uskottavuuden estimaattori.

a) Laske Fisherin informaatio  $i(\mu)$ .

b) Mitä normaalijakaumaa  $\hat{\mu}$  approksimatiivisesti noudattaa, kun  $n$  on suuri?

c) Oletetaan, että havaintoja on  $n = 50$  ja niiden keskiarvoksi saadaan  $\bar{y} = 32$ . Muodosta Waldin testiin (eli yo normaaliapproksimaatioon) perustuva approksimatiivinen 95%:n luottamusväli  $\mu$ :lle. (6 p.)

### Muistin tueksi

Satunnaismuuttujan  $Y \sim P(\mu)$  pistetodennäköisyysfunktio on  $f(y; \mu) = \mu^y e^{-\mu} / y!$  ( $y = 0, 1, \dots$ ). Lisäksi  $E(Y) = \mu$  ja  $\text{var}(Y) = \mu$ .

Jos  $\Phi$  on  $N(0, 1)$ -jakauman kertymäfunktio, niin  $\Phi(1.645) \approx 0.95$ ,  $\Phi(1.96) \approx 0.975$ ,  $\Phi(2.336) \approx 0.01$

Ole hyvä ja vastaa kurssikyselyyn: <http://mathstat.helsinki.fi/kurssit/kysely/>

## Tilastollisen päättelyn kurssi — Loppukoe 19. 12. 2006

1. Toistokokeessa suoritetaan  $n$  riippumatonta toistoa ja yksittäisen kokeen (toiston) onnistumistodennäköisyys on tuntematon  $\theta$ . Satunnaismuuttuja  $Y_i$  saa arvon 1, jos  $i$ :s koe onnistui, ja arvon 0, jos se epäonnistui, joten  $P(Y_i = 1) = \theta$  ja  $P(Y_i = 0) = 1 - \theta$ . Muodosta toistokoetta kuvaavan tilastollisen mallin lauseke ja johda huolellisesti perustellen suurimman uskottavuuden estimaatti  $\hat{\theta}$ , kun havainnot ovat  $y_1, \dots, y_n$ . Ilmoita myös havaittu informaatio  $j(\hat{\theta}; \mathbf{y})$ .
2. Tilastollisen mallin parametri on  $\theta$ , ja estimoitavana on sen reaalin funktio eli muunnos  $g(\theta)$ . Selosta lyhyesti, miten määritellään estimaattorin  $T$  a) harhattomuus, b) keskineliövirhe, c) tarkentuvuus.
3. a) Tarkastellaan tilastollista mallia  $f_Y(\mathbf{y}; \theta)$ . Miten määritellään ehdollisen jakauman avulla parametrin  $\theta$  tyhjentävä tunnusluku? Mikä tunnusluku on aina tyhjentävä (ns. triviaali tyhjentävä tunnusluku)?  
 b) Olkoot  $Y_1, \dots, Y_n \sim P(\mu) \perp$ . Etsi tässä mallissa parametrille  $\mu$  yksiulotteinen tyhjentävä tunnusluku.
4. Diskreetin satunnaismuuttujan  $Y$  arvojoukko on  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ , ja sen jakauma riippuu parametrista  $\theta$ , jolla on kolme mahdollista arvoa: 1, 2 ja 3. Vastaavat pistetodennäköisyydet on lueteltu alla.

$y$	0	1	2	3	4
$f_Y(y; 1)$	.03	.02	.05	.80	.10
$f_Y(y; 2)$	.05	.05	.80	.10	.00
$f_Y(y; 3)$	.60	.38	.02	.00	.00

Halutaan testata hypoteesia  $H_0: \theta = 1$  vastaan  $H_1: \theta = 3$  merkitsevyytasolla 0.05. Ilmoita voimakkaimman testin kriittinen alue. Muodosta myös sen voimafunktio koko parametriavaruudessa.

5. Olkoot  $Y_1, \dots, Y_n \sim P(\mu) \perp$  ja olkoon  $\hat{\mu} = \bar{Y}$  suurimman uskottavuuden estimaattori.
  - a) Mitä normaalijakaumaa  $\hat{\mu}$  approksimatiivisesti noudattaa, kun  $n$  on suuri?
  - b) Havainnot on  $n = 50$  ja niiden keskiarvo on  $\bar{y} = 18$ . Muodosta Waldin testiin (eli yo. normaaliapproksimaatioon) perustuva approksimatiivinen 99 %:n luottamusväli  $\mu$ :lle.

### Muistin tueksi:

Muuttujan  $Y \sim P(\mu)$  pistetodennäköisyysfunktio on  $f(y; \mu) = e^{-\mu} \mu^y / y!$ ,  $y = 0, 1, 2, \dots$ , ja  $E(Y) = \mu$ ,  $\text{var}(Y) = \mu$ .

Kääntöpuolella on standardinormaalijakauman taulukko.

**Table of the Standard Normal Distribution Function**

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du$$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0.00	0.5000	0.60	0.7257	1.20	0.8849	1.80	0.9641	2.40	0.9918
0.01	0.5040	0.61	0.7291	1.21	0.8869	1.81	0.9649	2.41	0.9920
0.02	0.5080	0.62	0.7324	1.22	0.8888	1.82	0.9656	2.42	0.9922
0.03	0.5120	0.63	0.7357	1.23	0.8907	1.83	0.9664	2.43	0.9925
0.04	0.5160	0.64	0.7389	1.24	0.8925	1.84	0.9671	2.44	0.9927
0.05	0.5199	0.65	0.7422	1.25	0.8944	1.85	0.9678	2.45	0.9929
0.06	0.5239	0.66	0.7454	1.26	0.8962	1.86	0.9686	2.46	0.9931
0.07	0.5279	0.67	0.7486	1.27	0.8980	1.87	0.9693	2.47	0.9932
0.08	0.5319	0.68	0.7517	1.28	0.8997	1.88	0.9699	2.48	0.9934
0.09	0.5359	0.69	0.7549	1.29	0.9015	1.89	0.9706	2.49	0.9936
0.10	0.5398	0.70	0.7580	1.30	0.9032	1.90	0.9713	2.50	0.9938
0.11	0.5438	0.71	0.7611	1.31	0.9049	1.91	0.9719	2.52	0.9941
0.12	0.5478	0.72	0.7642	1.32	0.9066	1.92	0.9726	2.54	0.9945
0.13	0.5517	0.73	0.7673	1.33	0.9082	1.93	0.9732	2.56	0.9948
0.14	0.5557	0.74	0.7704	1.34	0.9099	1.94	0.9738	2.58	0.9951
0.15	0.5596	0.75	0.7734	1.35	0.9115	1.95	0.9744	2.60	0.9953
0.16	0.5636	0.76	0.7764	1.36	0.9131	1.96	0.9750	2.62	0.9956
0.17	0.5675	0.77	0.7794	1.37	0.9147	1.97	0.9756	2.64	0.9959
0.18	0.5714	0.78	0.7823	1.38	0.9162	1.98	0.9761	2.66	0.9961
0.19	0.5753	0.79	0.7852	1.39	0.9177	1.99	0.9767	2.68	0.9963
0.20	0.5793	0.80	0.7881	1.40	0.9192	2.00	0.9773	2.70	0.9965
0.21	0.5832	0.81	0.7910	1.41	0.9207	2.01	0.9778	2.72	0.9967
0.22	0.5871	0.82	0.7939	1.42	0.9222	2.02	0.9783	2.74	0.9969
0.23	0.5910	0.83	0.7967	1.43	0.9236	2.03	0.9788	2.76	0.9971
0.24	0.5948	0.84	0.7995	1.44	0.9251	2.04	0.9793	2.78	0.9973
0.25	0.5987	0.85	0.8023	1.45	0.9265	2.05	0.9798	2.80	0.9974
0.26	0.6026	0.86	0.8051	1.46	0.9279	2.06	0.9803	2.82	0.9976
0.27	0.6064	0.87	0.8079	1.47	0.9292	2.07	0.9808	2.84	0.9977
0.28	0.6103	0.88	0.8106	1.48	0.9306	2.08	0.9812	2.86	0.9979
0.29	0.6141	0.89	0.8133	1.49	0.9319	2.09	0.9817	2.88	0.9980
0.30	0.6179	0.90	0.8159	1.50	0.9332	2.10	0.9821	2.90	0.9981
0.31	0.6217	0.91	0.8186	1.51	0.9345	2.11	0.9826	2.92	0.9983
0.32	0.6255	0.92	0.8212	1.52	0.9357	2.12	0.9830	2.94	0.9984
0.33	0.6293	0.93	0.8238	1.53	0.9370	2.13	0.9834	2.96	0.9985
0.34	0.6331	0.94	0.8264	1.54	0.9382	2.14	0.9838	2.98	0.9986
0.35	0.6368	0.95	0.8289	1.55	0.9394	2.15	0.9842	3.00	0.9987
0.36	0.6406	0.96	0.8315	1.56	0.9406	2.16	0.9846	3.05	0.9989
0.37	0.6443	0.97	0.8340	1.57	0.9418	2.17	0.9850	3.10	0.9990
0.38	0.6480	0.98	0.8365	1.58	0.9429	2.18	0.9854	3.15	0.9992
0.39	0.6517	0.99	0.8389	1.59	0.9441	2.19	0.9857	3.20	0.9993
0.40	0.6554	1.00	0.8413	1.60	0.9452	2.20	0.9861	3.25	0.9994
0.41	0.6591	1.01	0.8437	1.61	0.9463	2.21	0.9864	3.30	0.9995
0.42	0.6628	1.02	0.8461	1.62	0.9474	2.22	0.9868	3.35	0.9996
0.43	0.6664	1.03	0.8485	1.63	0.9485	2.23	0.9871	3.40	0.9997
0.44	0.6700	1.04	0.8508	1.64	0.9495	2.24	0.9875	3.45	0.9997
0.45	0.6736	1.05	0.8531	1.65	0.9505	2.25	0.9878	3.50	0.9998
0.46	0.6772	1.06	0.8554	1.66	0.9515	2.26	0.9881	3.55	0.9998
0.47	0.6808	1.07	0.8577	1.67	0.9525	2.27	0.9884	3.60	0.9998
0.48	0.6844	1.08	0.8599	1.68	0.9535	2.28	0.9887	3.65	0.9999
0.49	0.6879	1.09	0.8621	1.69	0.9545	2.29	0.9890	3.70	0.9999
0.50	0.6915	1.10	0.8643	1.70	0.9554	2.30	0.9893	3.75	0.9999
0.51	0.6950	1.11	0.8665	1.71	0.9564	2.31	0.9896	3.80	0.9999
0.52	0.6985	1.12	0.8686	1.72	0.9573	2.32	0.9898	3.85	0.9999
0.53	0.7019	1.13	0.8708	1.73	0.9582	2.33	0.9901	3.90	1.0000
0.54	0.7054	1.14	0.8729	1.74	0.9591	2.34	0.9904	3.95	1.0000
0.55	0.7088	1.15	0.8749	1.75	0.9599	2.35	0.9906	4.00	1.0000
0.56	0.7123	1.16	0.8770	1.76	0.9608	2.36	0.9909		
0.57	0.7157	1.17	0.8790	1.77	0.9616	2.37	0.9911		
0.58	0.7190	1.18	0.8810	1.78	0.9625	2.38	0.9913		
0.59	0.7224	1.19	0.8830	1.79	0.9633	2.39	0.9916		