TILASTOLLISEN PÄÄTTELYN JATKOKURSSI

"PUOLI KURSSIA"

1. a) Suurten lukujen laki (Formulointi ja tulkinta)

b) Määritä parametrin

$$p = F\{ \underline{X} \le x_0 \}$$

konsistentti estimaattorijono. Perustelut.
Tässä x_0 on annettu (kiinteä) reaaliluku ja F on tunnettu (= tarkasteltavan satunnaismuuttujan $\underline{X}$ kertym.funktio).

2. Tyhjentävyyden käsite

a) Miten havainnollistaisit/tulkitsisit tyhjentävyyttä ja sen tärkeyttä tilastotieteessä.

b) Minimaalinen tyhjentävyys ja minimaalisen tyhjentävän tunnusluvun konstruointi

c) Määritä minimaalinen tyhjentävä tunnusluku parametrille μ tapauksessa

$$X \sim N(\mu, 1).$$

3. a) Formuloi keskeinen raja-arvolause ja esitä perusteita miksi tulos on tärkeä tilastotieteessä.

b) Oletetaan $X_i \sim N(0,1)$ II, $i = 1, 2, \ldots, n$

& $$\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$$

Määritä muuttujan

$$\sqrt{n}\,(\bar{X}_n)^2$$

rajajakauma, kun $n \to \infty$.

4. Todistustehtävä: Asymptoottisen normaalisuuden säilyminen muunnoksille. Taylor-sarja tarkastelu (jatkuu)

3

4. Oletetaan, että

$$\sqrt{n}\,(T_n - \theta) \xrightarrow[\mathcal{L}]{} N(0, \tau^2)$$

& $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ on (riittävän säännöllinen) funktio, jolle $f'(\theta) \neq 0$. Osoita (sopivin oletuksin) että

$$\sqrt{n}\,(f(T_n) - f(\theta)) \xrightarrow[\mathcal{L}]{} N(0, \tau^2 (f'(\theta))^2)$$

5. Tarkastellaan lineaarista regressiomallia

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i \;, \quad i = 1, \ldots, n \quad \Big/ \quad \begin{array}{l} E(\varepsilon_i) = 0 \\ \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2 \end{array}$$

a) Saata malli matriisimuotoon

$$\underset{\sim}{y} = \underline{X}\,\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$$

b) Tiedetään, että $\underset{\sim}{\beta}$-vektorin osalta Fisherin informaatiomatriisi on

$$\frac{1}{\sigma^2}\,\underline{X}'\,\underline{X}$$

Esitä / ~~kvav~~ arvosmuollista miten Fisherin informaatio riippuu x_i-arvojen "käyttäytymisestä"

TILASTOLLISEN PÄÄTTELYN JATKOKURSSI
"1/2 KURSSIA" (5 op).

3.3.2009

(1) Suurimman uskottavuuden estimaattori (MLE). Määritä MLE tapauksessa $\underline{X} \sim \text{Bernoulli}(\theta)$, kun käytettävissä on $\perp\!\!\!\perp$ otos $x_1, \ldots, x_n$. Onko estimaattori harhaton? Arvioi MLE:n varianssin kyvyn esimerkin tapauksessa.

(2) a) Suurten lukujen laki (Formulointi ja tulkinta)
b) Osoita suoraan, että muuttujajono

$$\overline{\underline{X}}_n = \frac{1}{n}(\underline{X}_1 + \ldots + \underline{X}_n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

toteuttaa suurten lukujen lain mukaisen tuloksen, kun

$$\underline{X}_i\text{:t } \perp\!\!\!\perp \;\&\; \underline{X}_i \sim N(\mu, \sigma^2).$$

(3) θ:n suhteen minimaalisen tyhjentävän tunnuslukuun konstruktio, kun $\underline{X} \sim$ Bernoulli(θ). PERUSTELUT?

(4) Estimaattorijonon konsistenssi

a) Palauta mieleen ja esitä konsistenssin määritelmä.

b) Miksi konsistenssi on tärkeä ominaisuus?

c) Määritä parametrin

$$p = F\{\underline{X} \leq x_0\}$$

konsistentti estimaattorijono. Perustelut.

Tässä: x_0 on annettu (kiinteä?) reaaliluku ja F on tunnettu (= tarkasteltavan satunnaismuuttujan $\underline{X}$ kertymäfunktio.

(5) Formuloi keskeisen raja-arvolauseen tulos riippumattomien muuttujien (+ sopivia lisäoletuksia) tapauksessa. Miksi tulos on tilastotieteessä tärkeä?